详细解答

STEP III 1998，第 7 题

纯数学 · 曲线描绘与积分

> **STEP III 1998，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q7

关键思路

第一个函数并非随意安排的热身题：把 $\mathrm{b}(x)$ 求导并令导数为零时，所得的方程正好是 $\mathrm{f}(x/T)=0$。因此，我们对 f 的一切认识（只有一个正根，且位于 2 与 3 之间）都告诉我们 b 在何处转向。至于 B 如何依赖 T，则来自自然的代换（substitution）$x=Tu$，它把 T 从被积函数（integrand）中抽走。

解答

绘画 f 的草图并求 m

我们有 $\mathrm{f}(0)=1\cdot(-3)+3=0$，而且

$$\mathrm{f}'(s)=\mathrm{e}^{s}(s-3)+\mathrm{e}^{s}=\mathrm{e}^{s}(s-2).$$

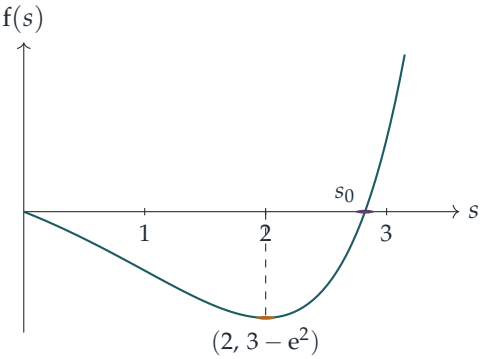
由于 $\mathrm{e}^{s}>0$，f 在 $[0,2]$ 上递减，在 $[2,\infty)$ 上递增，并有极小值 $\mathrm{f}(2)=3-\mathrm{e}^{2}\approx 3-7.29=-4.29$。当 $s\to\infty$ 时，$\mathrm{e}^{s}(s-3)\to\infty$，所以 $\mathrm{f}(s)\to\infty$。

因为 $\mathrm{f}(0)=0$ 且 f 在 $[0,2]$ 上严格递减（strictly decreasing），所以当 $0<s\le 2$ 时 $\mathrm{f}(s)<0$。在 $[2,\infty)$ 上，它由一个负值严格递增至 $+\infty$，故此在该处恰好穿过零一次，设在某个 $s_0>2$。因此 s_0 是 f 唯一的正根。

取 $\mathrm{e}\approx 2.7$：

$$\mathrm{f}(1)=3-2\mathrm{e}\approx -2.4,\qquad \mathrm{f}(2)\approx -4.29,\qquad \mathrm{f}(3)=0+3=3.$$

所以满足 $\mathrm{f}(m)>0$ 的最小正整数是 $m=3$，而且 $2<s_0<3$（事实上 $s_0\approx 2.82$）。



b 的唯一转向点

设 $u = x/T$。根据商法则（quotient rule），

$$\mathrm{b}'(x) = \frac{3x^2(\mathrm{e}^{x/T}-1) - x^3\cdot\frac{1}{T}\mathrm{e}^{x/T}}{(\mathrm{e}^{x/T}-1)^2} = \frac{x^2\left(3\mathrm{e}^{u}-3-u\,\mathrm{e}^{u}\right)}{(\mathrm{e}^{u}-1)^2} = -\frac{x^2\,\mathrm{f}(u)}{(\mathrm{e}^{u}-1)^2}.$$

当 $x > 0$ 时，我们有 $x^2 > 0$ 及 $(\mathrm{e}^u - 1)^2 > 0$，所以 $\mathrm{b}'(x) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{f}(x/T) = 0$。由第一部分可知，这只会在 $x/T = s_0$ 时发生，所以 b 在 $0 < x < \infty$ 内只有一个转向点（turning point），位于

$$x = s_0 T \approx 2.82\,T.$$

此外，当 $0 < u < s_0$ 时 $\mathrm{f}(u) < 0$，当 $u > s_0$ 时 $\mathrm{f}(u) > 0$，所以在这一点之前 $\mathrm{b}' > 0$，之后 $\mathrm{b}' < 0$：它是一个极大点。

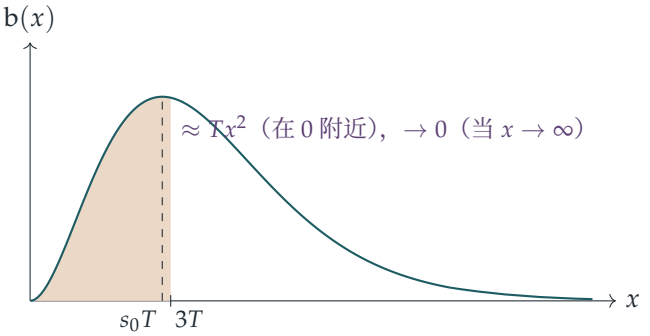
想一想 在 $x = 0$ 附近，分子和分母同时趋于零，b 的图像是甚么样子的?

当 x 很小时，$\mathrm{e}^{x/T} - 1 \approx x/T$，所以

$$\mathrm{b}(x) \approx \frac{x^3}{x/T} = Tx^2,$$

图像离开原点时形如抛物线，斜率为零。（所以 $\mathrm{b}(0) = 0$ 是自然的取值。）当 x 很大时，指数函数压倒任何幂函数：$\mathrm{b}(x) \approx x^3\mathrm{e}^{-x/T} \to 0$，所以 x 轴是渐近线（asymptote）。由于对所有 $x > 0$ 都有 $\mathrm{b}(x) > 0$，图像由原点上升至位于 $x = s_0 T$ 的单一个峰，然后向横轴衰减。

利用第一部分，峰的高度是 $\mathrm{b}(s_0T) = T^3 s_0^3/(\mathrm{e}^{s_0}-1) \approx 1.42\,T^3$，而 $\mathrm{b}(3T) = 27T^3/(\mathrm{e}^3-1)$ 只是略小一点。



（草图以 $T = 1$ 绘画；阴影区域是最后一部分所用的区域。）

B 的形式

代入 $x = Tu$，则 $\mathrm{d}x = T\,\mathrm{d}u$，而由于 $T > 0$，积分上下限 $0, \infty$ 不变：

$$B = \int_0^\infty \frac{T^3u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,T\,\mathrm{d}u = T^4\int_0^\infty \frac{u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u.$$

最后这个积分不含 T，所以它是一个常数 K（我们可假设它是有限的）。因此 $B = KT^4$，其中 $n = 4$。

估算 K

用同一个代换，并取 $m = 3$，

$$KT^4 = B \approx 2\int_0^{3T} \mathrm{b}(x)\,\mathrm{d}x = 2T^4\int_0^3 \frac{u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u, \qquad \text{所以} \qquad K \approx 2\int_0^3 \frac{u^3}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u.$$

这是草图中阴影面积的两倍（取 $T = 1$）。从图像读出高度，并取 $\mathrm{e} \approx 2.7$：

$$\mathrm{b}(0) = 0, \quad \mathrm{b}(1) \approx \frac{1}{1.7} \approx 0.59, \quad \mathrm{b}(2) \approx \frac{8}{6.29} \approx 1.27, \quad \mathrm{b}(3) \approx \frac{27}{18.7} \approx 1.45.$$

以阔度为 1 的长条使用梯形法则（trapezium rule），得

$$\int_0^3 \approx \tfrac{1}{2}(0) + 0.59 + 1.27 + \tfrac{1}{2}(1.45) \approx 2.58,$$

所以

$$K \approx 5.$$

更粗略的估算是把阴影区域当作底为 3、高约 1.45 的三角形，得面积约 2.2，即 $K \approx 4.3$。无论用哪种方法，K 大约是 4 至 5。（三角形的估算必定偏低，因为曲线位于由原点至 $(3, \mathrm{b}(3))$ 的直线之上。）

验算

- 以数值二分法（bisection）求得 f 的根为 $s_0 \approx 2.8214$；取 $T = 1.7$ 对 b′ 作数值扫描，恰好找到一次变号，位于 $x \approx 4.797 \approx 1.7 s_0$。
- 用辛普森法则（Simpson's rule）计算，当 $T = 0.5$、1 及 2.3 时都得 $B/T^4 \approx 6.4939$：每次的值相同，印证了 $n = 4$。这与已知的精确值 $K = \pi^4/15 \approx 6.494$ 吻合。
- 积分 $\int_0^3 u^3/(\mathrm{e}^u - 1)\,\mathrm{d}u \approx 2.552$，所以题目容许的近似给出 $K \approx 5.10$。我们估算的 5 大致正确。与 6.49 之间的差距，是题目的近似 $B \approx 2\int_0^{3T}$ 本身的误差，而不是我们计算上的误差。

常见错误

- 忘记 $\mathrm{f}(0) = 0$：$s = 0$ 是 f 的一个根，但它对应 $x = 0$，不在 $0 < x < \infty$ 之内，所以转向点仍然只有一个。
- 在 B 中作变量代换时，忘记由 $\mathrm{d}x = T\,\mathrm{d}u$ 而来的因子 T，结果得出 $n = 3$。

STEP 之外

函数 b 就是黑体辐射（black-body radiation）的普朗克定律（Planck's law），其中 x 担当频率的角色，T 则是温度。峰的位置 $x = s_0 T$ 是维恩位移定律（Wien's displacement law），而 $B \propto T^4$ 是斯特藩–玻尔兹曼定律（Stefan–Boltzmann law）。精确值 $K = \pi^4/15$ 来自展开式 $1/(\mathrm{e}^u - 1) = \sum_{k\geq 1} \mathrm{e}^{-ku}$，由此得 $K = 6\sum_{k\geq 1} 1/k^4 = 6\zeta(4)$。论证求和与积分可以这样互换，是典型的大学一年级分析（analysis）题目；可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。