详细解答

STEP III 1998，第 6 题

纯数学 · 多面体的体积

> **STEP III 1998，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q6

关键思路

把正方体放在坐标轴上，使它的顶点（vertex）就是坐标全为 0 或 a 的那些点。这样，距离可由三维的毕氏定理（Pythagoras' theorem）求得，而那些不易处理的立体，则可以从正方体切去简单的小块来量度。正四面体（regular tetrahedron）就是正方体切去四个角后剩下的部分，而正八面体（regular octahedron）则是两个底对底拼合的正方形底角锥（pyramid）。

解答

第 (i) 部分

取正方体 $[0,a]^3$。它的顶点是八个点 (x,y,z)，其中每个坐标为 0 或 a；两个顶点相邻（adjacent，即由一条棱（edge）相连）当且仅当它们恰好有一个坐标不同。

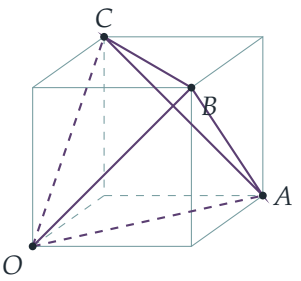
可以选哪四个顶点？ 按顶点的坐标中有多少个等于 a，把顶点称为偶顶点或奇顶点。沿一条棱移动会改变一个坐标，所以必定令奇偶互换。假设我们的四个顶点中包括一个偶顶点 P 和一个奇顶点 Q。它们并不相邻，所以它们有三个坐标不同：Q 就是与 P 相对的顶点。其余每个顶点都与 P 或 Q 相邻（三个奇顶点与 P 相邻，三个偶顶点与 Q 相邻），所以无法再加入第三个顶点。因此这四个顶点全是偶顶点，

$$O=(0,0,0),\quad A=(a,a,0),\quad B=(a,0,a),\quad C=(0,a,a),$$

或者全是奇顶点（即这组顶点对平面 $x=\frac{1}{2}a$ 的反射，所得的立体与原来的全等（congruent））。

正则性。 O,A,B,C 中任意两点都恰好有两个坐标不同，每个相差 a，所以六个距离全都

是 $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,a$。因此四个面都是边长为 $\sqrt{2}\,a$ 的等边三角形（equilateral triangle），而 $OABC$ 是一个正四面体。它的每条棱都是正方体某一个面的对角线。



体积。从正方体中移走这个四面体，剩下四个角块，每个奇顶点处各有一个。例如，位于 $(a,0,0)$ 的角块，就是以该顶点及其三个相邻顶点 O、A、B 为顶点的四面体。它在 $(a,0,0)$ 处的三条棱互相垂直，长度均为 a，所以它是一个角锥，底是面积为 $\frac{1}{2}a^2$ 的直角三角形，高为 a，体积为 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot a=\frac{1}{6}a^3$。因此

$$V_{\text{tet}}=a^3-4\cdot\tfrac{1}{6}a^3=\tfrac{1}{3}a^3.$$

要令棱长为单位长度，我们需要 $\sqrt{2}\,a=1$，即 $a=1/\sqrt{2}$ 及 $a^3=1/(2\sqrt{2})$。所以棱长为单位长度的正四面体的体积是

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{12}.$$

? **想一想** 为甚么四个角块和这个四面体恰好填满正方体，而且互不重叠?

四面体的每个面，例如 OAB，都恰好切去正方体的一个顶点，这里是 $(a,0,0)$：通过 O、A、B 的平面 $x-y-z=0$ 把 $(a,0,0)$ 严格地分在一侧，而其余七个顶点则在另一侧或在平面上。所以正方体分成四个角块（每个面之外各有一个）和位于中间的四面体。

第 (ii) 部分

棱长为单位长度的正八面体，可以把六个顶点放在

$$(\pm h,0,0),\quad (0,\pm h,0),\quad (0,0,\pm h),\qquad h=\tfrac{1}{\sqrt{2}},$$

其中每个顶点都与不和它相对的四个顶点相连。两个这样的顶点，例如 $(h,0,0)$ 和 $(0,h,0)$，相距 $\sqrt{2}\,h=1$。所以十二条棱的长度全是 1，而八个面（每个卦限（octant）各有一个）都是等边三角形。位于平面 $z=0$ 上的四个顶点组成一个边长为 1 的正方形。这个八面体就是以这个正方形为底的两个正方形底角锥，顶点为 $(0,0,\pm h)$，高各为 h。因此

$$V_{\text{oct}}=2\cdot\tfrac{1}{3}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

更一般地，把长度放大 e 倍，体积就放大 e^3 倍，所以棱长为 e 的正八面体的体积是 $\frac{\sqrt{2}}{3}e^3$。

第 (iii) 部分

现在把边长为 a 的正方体的中心放在原点会较为简洁，即取 $[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]^3$。它各个面的中心是

$$(\pm\tfrac{1}{2}a, 0, 0), \quad (0, \pm\tfrac{1}{2}a, 0), \quad (0, 0, \pm\tfrac{1}{2}a).$$

这正是第 (ii) 部分的布局，其中 $h = \frac{1}{2}a$。相对两面的中心相距 a。相邻两面的中心相距 $\sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{2}a)^2} = a/\sqrt{2}$。以这六点为顶点的凸（convex）立体有八个面，每个卦限各有一个：例如，在卦限 $x, y, z \geq 0$ 内的面是以 $(\frac{1}{2}a, 0, 0)$、$(0, \frac{1}{2}a, 0)$、$(0, 0, \frac{1}{2}a)$ 为顶点的三角形。每个面都是边长为 $a/\sqrt{2}$ 的等边三角形，所以各面的中心组成一个棱长为 $e = a/\sqrt{2}$ 的正八面体。

根据第 (ii) 部分，它的体积是

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6}.$$

第 (i) 部分的四面体，其顶点是同一个正方体的其中四个顶点，体积为 $\frac{1}{3}a^3$。由于 $\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}a^3$，八面体的体积是四面体体积的一半，正如题目所求。

验算

- 利用“底面积乘高”的公式，以底面积 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 和高 $\sqrt{2/3}$ 计算，得出单位正四面体的体积为 $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \approx 0.11785$，与第 (i) 部分吻合。
- 棱长相等时，$V_{\text{oct}} = 4V_{\text{tet}}$，因为 $\frac{\sqrt{2}}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}$。这与一个经典的分割相符：把棱长为 2 的四面体分割成四个棱长为 1 的四面体（在它的四个角）和一个棱长为 1 的八面体（在中间）；以单位四面体为量度单位，就是 $8 = 4 + 4$。
- 数值上，对所有四个互不相邻的正方体顶点的选法作行列式（determinant）计算，得出单位正方体的情况下体积为 $\frac{1}{3}$；而对区域 $|x| + |y| + |z| \leq 1/\sqrt{2}$ 作蒙地卡罗（Monte Carlo）估算，得出 0.4715，对照 $\sqrt{2}/3 \approx 0.47140$。

常见错误

- 在第 (i) 部分把正方体的边长取为 1：这时四面体的棱长是 $\sqrt{2}$ 而不是 1，它的体积须按 $(1/\sqrt{2})^3$ 的比例重新缩放。
- 减去错误的角块：角块共有四个（每个没有用到的顶点处各有一个），每个体积为 $\frac{1}{6}a^3$，而不是八个。

► 在第 (iii) 部分，把正方体的边长当作八面体的棱长。相邻两面的中心相距 $a/\sqrt{2}$。

STEP 之外

正方体内的两个四面体，以及由各面中心组成的八面体，是柏拉图立体（Platonic solids）及其对称群（symmetry group）这个故事的开端：正方体的旋转之中，保持其中一个内接四面体不变的那些旋转组成一个阶为 12 的群，是正方体全部 24 个旋转的一半。正方体与八面体互为对偶（dual）（其中一个的各面中心就是另一个的顶点），而这类立体的体积可以由行列式简洁地求出，因为行列式量度的正是线性映射（linear map）把体积缩放多少。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）把行列式视为体积来处理，而 Armstrong 的 *Groups and Symmetry*（群与对称）则研究这些立体的对称群。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。