详细解答

STEP III 1998，第 5 题

纯数学 · 矩阵指数

STEP III 1998，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s3-q5

关键思路

矩阵（matrix）的无穷级数（infinite series）看来吓人，但这里两个矩阵的幂都按非常简单的规律重复：$\mathbf{M}$ 的幂像 i 的幂一样循环，而 $\mathbf{N}$ 的幂由平方起全部为零。一旦知道每一个幂，级数便会分拆成熟悉的纯量级数（或者干脆终止），于是可以直接读出相应的变换（transformation）。最后一部分则是直接的矩阵计算，而它的几何意义，来自追问每个变换会令哪些直线保持不变。

解答

矩阵 $\mathbf{M}$

乘开，得

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{I},$$

正如所求。因此，对每个整数 $k \geq 0$，

$$\mathbf{M}^{2k} = (\mathbf{M}^2)^k = (-1)^k\mathbf{I}, \qquad \mathbf{M}^{2k+1} = (-1)^k\mathbf{M}.$$

把级数按 $\theta\mathbf{M}$ 的偶次幂和奇次幂分开，

$$\begin{aligned}\exp(\theta\mathbf{M}) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}\mathbf{M}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\mathbf{M}^{2k+1}\\ &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!}\Big)\mathbf{I} + \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big)\mathbf{M}\\ &= \cos\theta\,\mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{M} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

（这样分拆是合理的，因为矩阵级数的每个元素都是一个实数级数，其各项的大小以 $|\theta|^r/r!$ 为界，所以它绝对收敛（converges absolutely），可以重新组合。）

? **想一想** 我在哪里见过 $\cos\theta\,\mathbf{I} + \sin\theta\,\mathbf{M}$?

由于 $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}$，矩阵 $\mathbf{M}$ 的表现与 i 完全一样，而这个计算正是 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 的矩阵版本。从几何上看，$\exp(\theta\mathbf{M})$ 把 $(1,0)$ 送到 $(\cos\theta, \sin\theta)$，把 $(0,1)$ 送到 $(-\sin\theta, \cos\theta)$：它是**平面绕原点逆时针旋转（rotation）角** θ。（事实上 $\mathbf{M}$ 本身就是转角为 $\frac{\pi}{2}$ 的旋转，正如乘以 i 一样。）

矩阵 N

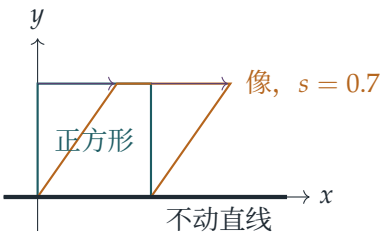
这里

$$\mathbf{N}^2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

所以对所有 $r \geq 2$ 都有 $\mathbf{N}^r = \mathbf{0}$，级数在两项之后便终止：

$$\exp(s\mathbf{N}) = \mathbf{I} + s\mathbf{N} = \begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

它把 (x, y) 送到 $(x + sy, y)$。每一点都平行于 x 轴移动，移动的距离与它的高度 y 成正比；x 轴上的点则完全不动。所以 $\exp(s\mathbf{N})$ 是一个**平行于 x 轴的错切（shear）**，以 x 轴为其不动点（fixed point）所成的直线，并把单位正方形送到一个面积相同的平行四边形（行列式（determinant）为 1）。



它们何时可交换?

记 $c = \cos\theta$ 及 $\sigma = \sin\theta$。则

$$\exp(s\mathbf{N})\exp(\theta\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -\sigma \\ \sigma & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+s\sigma & -\sigma+sc \\ \sigma & c \end{pmatrix},$$

$$\exp(\theta\mathbf{M})\exp(s\mathbf{N}) = \begin{pmatrix} c & -\sigma \\ \sigma & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & sc-\sigma \\ \sigma & s\sigma+c \end{pmatrix}.$$

两式相减,

$$\exp(s\mathbf{N})\exp(\theta\mathbf{M}) - \exp(\theta\mathbf{M})\exp(s\mathbf{N}) = s\sin\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

这个矩阵对每个 s 都是零矩阵，当且仅当 $\sin\theta = 0$（若 $\sin\theta \neq 0$，取 $s = 1$ 即可）。所以这两个矩阵对所有 s 都可交换（commute），恰好是在

$$\theta = n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

的时候。对这些值，$\exp(\theta\mathbf{M}) = (-1)^n\mathbf{I}$，即不是单位矩阵（identity matrix）就是 $-\mathbf{I}$。

? **想一想** 为甚么与这个错切可交换的旋转，必定是半周旋转或者根本不转?

设 R 为该旋转，S 为该错切（其中 $s \neq 0$），并假设 $SR = RS$。在 x 轴上任取一点 P，则 $S(P) = P$。于是

$$S(R(P)) = R(S(P)) = R(P),$$

所以 $R(P)$ 也是错切的不动点。但错切所固定的点只有 x 轴上的点。所以这个旋转必须把 x 轴映射到它自身，而绕原点的旋转之中能做到这一点的，只有转角为 0（恒等变换）或 π（半周旋转 $(x, y) \mapsto (-x, -y)$）的两个。反过来，这两个变换与每一个线性映射（linear map）都可交换，因为它们就是 $\pm\mathbf{I}$：把平面转半周和对它作错切，不论先后次序，结果都一样。任何其他旋转都会令错切的不动直线倾斜，所以先错切后旋转与先旋转后错切会得出不同的结果。

验算

- 当 $\theta = 0$ 时旋转矩阵是 $\mathbf{I}$，当 $s = 0$ 时错切是 $\mathbf{I}$，与级数的要求一致。
- 两个行列式都是 1（分别为 $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ 和 $1 \cdot 1$），旋转和错切都保持面积不变，理应如此。
- 数值上，取 $\theta = 1$ 并把级数的首 80 项相加，所得的元素与 $\cos 1 \approx 0.5403$ 和 $\sin 1 \approx 0.8415$ 吻合。取 $\theta = 1$、$s = 1$ 时，交换子（commutator）的对角线元素为 $\pm\sin 1 \approx \pm 0.8415$，与 $s\sin\theta\,\mathrm{diag}(1, -1)$ 吻合。

常见错误

- 以为对矩阵也有 $\exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}+\mathbf{B})$。这条法则需要 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，而这正是此处不成立的条件，除非 $\sin\theta = 0$。
- 只给出 $\theta = 0$（或 $\theta = 0, \pi$），而没有给出 π 的所有整数倍。
- 把 $\exp(s\mathbf{N})$ 称为拉伸（stretch）或放大（enlargement）：它保持面积不变，并且逐点固定 x 轴，这正是它成为错切的原因。

STEP 之外

矩阵指数（matrix exponential）是*李代数*（*Lie algebra*）与*李群*（*Lie group*）之间的桥梁：$\mathbf{M}$ 生成旋转群，$\mathbf{N}$ 生成错切群，而 $\exp(t\mathbf{A})$ 是线性微分方程（linear differential equation）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ 的解。对于不可交换的矩阵，$\exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ 不成立，其偏差的程度由交换子 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ 来量度，这个想法你在最后一部分已经遇过。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）涵盖矩阵指数及其在微分方程中的应用。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。