详细解答

STEP III 1998，第 4 题

纯数学 · 极坐标玫瑰线

STEP III 1998，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s3-q4

关键思路

要理解极坐标曲线（polar curve），方程简单时最容易的做法是把它化为直角坐标（Cartesian）形式；方程不简单时，则追踪 r 的正负号。整道题的关键在于以下约定：$r<0$ 的点要画在相反方向 $\theta+\pi$ 上、与原点距离 $|r|$ 之处。对于 $r=\cos k\theta$，这个约定决定了负的回圈是落在新的位置（形成新的花瓣），还是叠在已画好的花瓣之上。

解答

圆 $r=\cos\theta$

两边同乘 r，并利用 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$、$r^2=x^2+y^2$：

$$\begin{aligned} r^2=r\cos\theta \quad &\Longrightarrow \quad x^2+y^2=x \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

因此曲线上每一点都在圆心为 $(\frac{1}{2},0)$、半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆上。

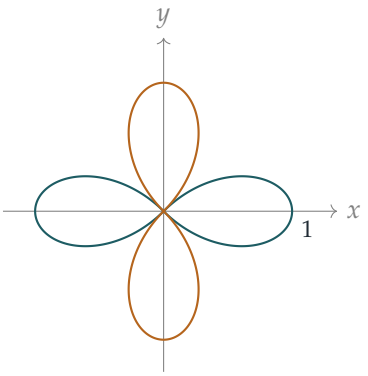
反过来，取这个圆上原点以外的任意一点 (x,y)。由于 $x=x^2+y^2>0$，它的极角满足 $-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$，而把 $r^2=x=r\cos\theta$ 除以 $r>0$ 便得 $r=\cos\theta$。至于原点，则在 $\theta=\pm\frac{1}{2}\pi$ 时到达。所以这条曲线正正就是这个圆，当 θ 由 $-\frac{1}{2}\pi$ 走到 $\frac{1}{2}\pi$ 时恰好描画一次；在这个范围内始终有 $r=\cos\theta\geq 0$，故此毋须用到正负号的约定。

曲线 $r=\cos 2\theta$

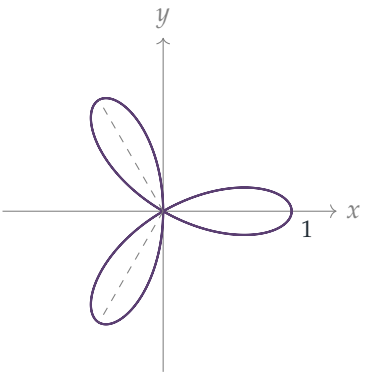
现在 r 会变号，而当 $r<0$ 时，我们把 (r,θ) 画在方向 $\theta+\pi$ 上、距离为 $|r|$ 之处。

- 当 $-\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{4}\pi$ 时，$r > 0$，由 0 上升至 $\theta = 0$ 时的 1，再回落到 0：得出一片沿正 x 轴的花瓣。
- 当 $\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi$ 时，$r < 0$，所以这些点画在 $\frac{5}{4}\pi$ 至 $\frac{7}{4}\pi$ 的方向上：得出一片沿负 y 轴的花瓣。
- 同理，$\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$（$r > 0$）给出一片沿负 x 轴的花瓣，而 $\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{7}{4}\pi$（$r < 0$）给出一片沿正 y 轴的花瓣。

结果是一条四叶玫瑰线（four-leaved rose），每片花瓣长度为 1，关于两条坐标轴都对称，而且花瓣之间只在原点相接。在草图中，蓝绿色的花瓣来自 $r > 0$，琥珀色的花瓣来自 $r < 0$。



$r = \cos 2\theta$



$r = \cos 3\theta$

曲线 $r = \cos 2n\theta$

由于 $\cos(-2n\theta) = \cos 2n\theta$，$n$ 与 $-n$ 给出同一条曲线，所以取 $n \geq 1$（$n = 0$ 的情况稍后再谈）。

> ? **想一想** 当 $r < 0$ 时，那些回圈是叠在已画好的回圈之上，还是落在新的位置?

在以 $\theta = k\pi/n = 2k \cdot \frac{\pi}{2n}$（$k = 0, 1, \ldots, 2n-1$）为中心、长度为 $\pi/(2n)$ 的各个区间上，我们有 $r > 0$。每个区间给出一片指向 $2k \cdot \frac{\pi}{2n}$ 方向的花瓣，这个方向是 $\frac{\pi}{2n}$ 的偶数倍。

在以 $\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2n}$ 为中心的各个区间上，我们有 $r < 0$，而这些点画在方向 $\theta + \pi$ 上，所以花瓣指向

$$(2k+1)\frac{\pi}{2n} + \pi = (2k+1+2n)\frac{\pi}{2n},$$

即 $\frac{\pi}{2n}$ 的奇数倍。因此负的回圈落在新的位置，也就是正花瓣之间的空隙。

所以 $r = \cos 2n\theta$ 是一条有 $4n$ 片全等（congruent）花瓣的玫瑰线，每片花瓣长度为 1，分别指向 $m\pi/(2n)$（$m = 0, 1, \ldots, 4n-1$）的方向，每片花瓣占的角为 $\pi/(2n)$，而相邻的

花瓣只在原点相接。（当 $n = 1$ 时，这就是上面的四叶玫瑰线。）各花瓣所占的角合共为 $4n \cdot \frac{\pi}{2n} = 2\pi$，所以它们刚好填满一整个周角，互不重叠。

至于退化情况 $n = 0$，曲线是 $r = 1$，即单位圆。

面积与 n 无关

由于花瓣互不重叠，当 θ 由 0 走到 2π 时，所围区域的每一部分都恰好被扫过一次，于是面积公式 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$（它只涉及 r^2，所以 r 的正负号并无影响）给出：当 $n \geq 1$ 时，

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 2n\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos 4n\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\left[\theta + \frac{\sin 4n\theta}{4n}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

因为 $\sin 8n\pi = 0$。这个结果与 n 无关，正如题目所求：花瓣愈多，每片花瓣就愈窄，两者恰好互相抵销。（被排除的情况 $n = 0$，即单位圆，面积为 π；公式中 $\sin 4n\theta/(4n)$ 一项正是用到 $n \neq 0$ 的地方。）

曲线 $r = \cos 3\theta$

> **想一想** 为甚么这条曲线有三片花瓣，而不是六片？

现在 $r > 0$ 的区间以 $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 为中心，给出指向这些方向的花瓣。负的回圈以 $\theta = \frac{1}{3}\pi, \pi, \frac{5}{3}\pi$ 为中心，并画在方向 $\frac{4}{3}\pi$、2π 和 $\frac{8}{3}\pi \equiv \frac{2}{3}\pi$ 上：正正就是正花瓣的方向。事实上，把 θ 换成 $\theta + \pi$，便得到相反方向上的

$$r = \cos(3\theta + 3\pi) = -\cos 3\theta$$

，那是同一点。所以 $r = \cos 3\theta$ 是一条三叶玫瑰线，花瓣长度为 1，沿 $\theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 的方向，每片占的角为 $\frac{1}{3}\pi$，而当 θ 由 0 走到 2π 时，整条曲线被描画了两次（$0 \leq \theta \leq \pi$ 时描画一次）。这就是上面右边的草图。

同样的论证说明：对任何奇数 k，$r = \cos k\theta$ 是一条描画两次的 k 叶玫瑰线；而对偶数 k，它是一条描画一次的 $2k$ 叶玫瑰线。

验算

- 在 $r = \cos\theta$ 中代入 $\theta = 0$：点 $(1, 0)$ 在 $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 上，原点（在 $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ 时）也在其上。
- 圆 $r = \cos\theta$ 的面积为 $\pi(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\pi$，而 $\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$ 与此吻合。同样，对于三叶玫瑰线，$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2 3\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\pi$。若在这里用 0 至 2π，便会重复计算，得出 $\frac{1}{2}\pi$。

- 数值验证：对 $n = 1, \ldots, 5$ 绘画 $r = \cos 2n\theta$，可找到 $4n$ 个花瓣尖端，而以蒙地卡罗方法（Monte Carlo）估算所围面积，每次都得出 $1.57 \approx \pi/2 = 1.5708$。

常见错误

- 忽略负的 r，结果 $r = \cos 2\theta$ 只画出两片花瓣。
- 以为 $r = \cos 3\theta$ 有六片花瓣，理由是 r 有六个回圈：其实负的回圈叠在正的回圈之上。
- 对描画两次的曲线（例如 $r = \cos 3\theta$）使用 $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 \, \mathrm{d}\theta$，令面积变成两倍。

STEP 之外

这些曲线称为 *rhodonea*，即玫瑰线（rose curve）。把一点写成复数（complex number）$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，玫瑰线 $r = \cos k\theta$ 就是 $z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)\theta}\right)$，即两个方向相反的圆周运动之和。这个观点把玫瑰线与本轮（epicycle）及傅里叶级数（Fourier series）联系起来，而面积公式 $\frac{1}{2}\int r^2 \, \mathrm{d}\theta$ 则是向量微积分（vector calculus）中格林定理（Green's theorem）的特殊情况。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）把这种以几何眼光看待复数的方法发挥得淋漓尽致。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。