详细解答

STEP III 1998，第 3 题

纯数学 · 线性递推关系

> **STEP III 1998，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q3

关键思路

这是一个带常数项的一阶线性递推关系（first-order linear recurrence），可说是微分方程（differential equation）$y' = cy - d$ 的离散版本。处理手法与常微分方程（ODE）相同：先找出常数解（即“平衡”（equilibrium）解），然后留意到与平衡解之间的偏差每天只是乘以同一个因子。至于极限，真正要花工夫的只有一件事：弄清楚 $((1+c)^N - 1)/c$ 在 $c \to 0$ 时的变化，而二项式定理（binomial theorem）正好解决这个问题。

解答

$c > 0$ 时求解

我们尝试对每个 T 设 $V_T = Ak^T + B$。代入递推关系，得

$$Ak^{N+1} + B = (1+c)(Ak^N + B) - d \quad \Longleftrightarrow \quad Ak^N(k - (1+c)) = cB - d.$$

右边与 N 无关，而左边除非恒为零，否则必随之变化（我们要求 $A \neq 0$ 及 $k \neq 0$，否则这个形式只是一个常数）。因此对每个 N，两边都必须为零：

$$k = 1 + c, \qquad B = \frac{d}{c},$$

这里可以除以 c，因为 $c > 0$。取这些值后，无论常数 A 是甚么，$V_T = A(1+c)^T + d/c$ 都满足递推关系。代入 $T = 0$ 得 $V_0 = A + d/c$，所以 $A = V_0 - d/c$，于是

$$\boxed{V_N = \left(V_0 - \frac{d}{c}\right)(1+c)^N + \frac{d}{c}}$$

想一想 我们猜了一个形式，结果行得通。但怎样知道没有其他解呢?

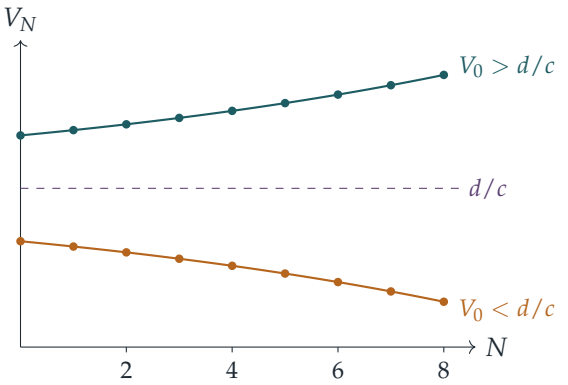
递推关系由 V_0 决定 V_1，再由 V_1 决定 V_2，如此类推，所以给定 V_0 后，恰好只有一个数列符合条件。我们的公式满足递推关系，而且 V_0 的值也正确，所以它就是那个数列。（如果你想要一个直接的论证，可设 $U_N = V_N - d/c$；递推关系变成 $U_{N+1} = (1+c)U_N$，所以 $U_N = (1+c)^N U_0$，答案相同。）

把答案改写成以下形式，稍后会很有用：

$$V_N = V_0(1+c)^N - d\,\frac{(1+c)^N - 1}{c}. \qquad (*)$$

这个式子有一个很好的解读：第一项是 V_0 以每天 c 的比率增长，第二项是 $d(1 + (1+c) + \cdots + (1+c)^{N-1})$，即每天的扣减额各自按余下的日数增长后，以等比级数（geometric series）求和的结果。

常数 d/c 是平衡值。若 $V_0 > d/c$，债券的价值会无止境地增长；若 $V_0 = d/c$，价值维持不变；若 $V_0 < d/c$，价值会愈跌愈快：



（图中取 $c = 0.1$ 及 $d/c = 5$，并分别取 $V_0 = 6$ 和 $V_0 = 4$。）

$c = 0$ 的情形

这时递推关系是 $V_{N+1} = V_N - d$：价值每天减少 d，是一个等差数列（arithmetic progression）。所以

$$\boxed{V_N = V_0 - Nd}$$

留意 $c > 0$ 时的公式不能直接代入 $c = 0$ 求值，因为式中有 d/c；这正是题目要问极限的原因。

$c \to 0$ 时的极限

固定 N，并使用 $(*)$。第一项趋向 V_0，因为对固定的 N 有 $(1+c)^N \to 1$。至于第二项，用二项式定理展开：

$$(1+c)^N - 1 = Nc + \binom{N}{2}c^2 + \cdots + c^N,$$

$$\text{所以} \quad \frac{(1+c)^N - 1}{c} = N + \binom{N}{2}c + \cdots + c^{N-1}.$$

由于 N 是固定的，这是一个关于 c 的多项式，只有有限多项，而且第一项之后的每一项都含有 c 的正数次幂。因此当 $c \to 0$ 时它趋向 N，于是

$$\lim_{c\to 0} V_N = V_0 - Nd,$$

这正是 $c = 0$ 时的解，符合题目要求。（等价地说，$\big((1+c)^N - 1\big)/c$ 是 x^N 在 $x = 1$ 处的差商（difference quotient），所以它的极限就是导数 N。）

“对固定的 N”这几个字很重要：若 c 很小但 N 很大，像 $\binom{N}{2}c$ 这样的项不一定小，而指数增长最终会胜过线性变化。

验算

- $N = 1$：公式给出 $(V_0 - d/c)(1+c) + d/c = (1+c)V_0 - d$，这就是递推关系本身。
- $V_0 = d/c$ 时，对所有 N 都有 $V_N = d/c$，即平衡状态。
- 数值上，取 $V_0 = 7$、$d = 2$、$N = 12$：公式在 $c = 0.01$ 时给出 $V_{12} \approx -17.48$，在 $c = 10^{-4}$ 时给出 -17.005，逐渐接近 $V_0 - 12d = -17$。在许多随机选取的有理数例子中，这个闭合公式也与直接迭代的结果完全吻合。

常见错误

- 取 $B = -d/c$：正负号来自 $cB - d = 0$，所以 $B = +d/c$。
- 用 $A = V_0$ 而不是 $A = V_0 - d/c$：常数 B 在 $T = 0$ 时同样有贡献。
- 试图在 $c > 0$ 的公式中直接代入 $c = 0$，但该式此时没有定义；必须取极限。

STEP 之外

这类递推关系称为*线性差分方程*（linear difference equations），其理论与线性常微分方程并行：通解（general solution）等于一个特解（particular solution，这里是常数解）加

上齐次方程（homogeneous equation）$U_{N+1} = (1+c)U_N$ 的通解。在金融学中，这就是定额还款的贷款或年金（annuity）的公式，而 $c \to 0$ 的极限则是由复利变化过渡到单利变化。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）在常微分方程理论之外，另有一节讲述一阶差分方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。