详细解答

STEP III 1998，第 2 题

纯数学 • Beta 积分的递推关系

STEP III 1998，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s3-q2

关键思路

这个积分其实是乔装了的贝塔函数（beta function）。每一部分都只需一个标准手法。第 (i) 部分用反射 $t \mapsto 1-t$，把 t 与 $1-t$ 的角色对调。第 (ii) 部分把被积函数（integrand）乘以 $1 = t + (1-t)$。第 (iii) 部分用分部积分法（integration by parts），把 $(1-t)$ 的一个幂次转移到 t 上。重复使用第 (iii) 部分，直至 $(1-t)$ 的幂次变成零，剩下的积分便可立即算出。

解答

第 (i) 部分

作代换（substitution）$u = 1-t$，则 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$，而积分限 $t = 0, 1$ 变成 $u = 1, 0$：

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_1^0 (1-u)^a u^b \,(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^b (1-u)^a \,\mathrm{d}u = \mathrm{I}(b,a).$$

$\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ 带来的负号，刚好在把积分限换回 0 和 1 时抵销。

第 (ii) 部分

由于 $t + (1-t) = 1$，被积函数可以写成

$$t^a(1-t)^b = t^a(1-t)^b(t + (1-t)) = t^{a+1}(1-t)^b + t^a(1-t)^{b+1}.$$

把每一项在 $[0,1]$ 上积分，便得 $\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}(a+1,b) + \mathrm{I}(a,b+1)$，正是所求。

第 (iii) 部分

我们对 $\mathrm{I}(a,b)$ 作分部积分，对 $(1-t)^b$ 求导，对 t^a 积分：

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{a+1}}{a+1}\cdot(-b(1-t)^{b-1})\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{a+1}}{a+1}(1-t)^b\right]_0^1 + \frac{b}{a+1}\int_0^1 t^{a+1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

> ? **想一想** 为甚么边界项（boundary term）会消失？哪里需要用到 a 和 b 是正数？

在 $t=1$ 处，因为 $b>0$，因子 $(1-t)^b$ 等于 0。在 $t=0$ 处，因为 $a+1>0$，因子 t^{a+1} 等于 0。所以方括号内的项为零，两边同乘以 $a+1$ 便得

$$(a+1)\,\mathrm{I}(a,b) = b\,\mathrm{I}(a+1,b-1),$$

这就是所求的结果。（若 $0<b<1$，最后那个积分中 $(1-t)$ 的幂次是负数。但由于 $b-1>-1$，它仍然收敛（converge）。至于下面的整数情形，反正总有 $b-1\geq 0$。）

对整数 a,b 计算 $\mathrm{I}(a,b)$。把结果写成 $\mathrm{I}(a,b)=\dfrac{b}{a+1}\,\mathrm{I}(a+1,b-1)$，然后反复使用。每一步都令第一个参数增加 1，第二个参数减少 1。当第二个参数降至 0 时便停止：

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(a,b) &= \frac{b}{a+1}\,\mathrm{I}(a+1,b-1) = \frac{b}{a+1}\cdot\frac{b-1}{a+2}\,\mathrm{I}(a+2,b-2) = \cdots \\ &= \frac{b(b-1)\cdots 1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}\,\mathrm{I}(a+b,0).\end{aligned}$$

每一步都是合理的，因为每次使用公式时，第二个参数都是正整数。现在 $\mathrm{I}(a+b,0)=\int_0^1 t^{a+b}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a+b+1}$。另外 $(a+1)(a+2)\cdots(a+b)=\dfrac{(a+b)!}{a!}$，所以

$$\boxed{\mathrm{I}(a,b)=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}}$$

这条公式对 a 和 b 是对称的，与第 (i) 部分的要求一致。当 a 或 b 等于 0 时，公式同样成立。

验算

- $\mathrm{I}(1,1)=\int_0^1(t-t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，而公式给出 $\frac{1!\,1!}{3!}=\frac{1}{6}$。
- 公式满足第 (ii) 部分：$\frac{(a+1)!\,b!}{(a+b+2)!}+\frac{a!\,(b+1)!}{(a+b+2)!}=\frac{a!\,b!\,(a+b+2)}{(a+b+2)!}=\frac{a!\,b!}{(a+b+1)!}$。
- 数值方面，用辛普森法则（Simpson's rule）得 $\mathrm{I}(2,3)\approx 0.0166667$，与 $\frac{2!\,3!}{6!}=\frac{1}{60}$ 吻合。我们亦随机取非整数的 a,b，以数值积分（quadrature）验算了第 (i) 至 (iii) 部分，结果吻合至约 10^{-11}。

常见错误

- 分部积分时把方向弄反。对 t^a 求导会令 $(1-t)$ 的幂次升高，方向错了。
- 忘记说明边界项为何消失。它之所以为零，全因 $a+1>0$ 及 $b>0$。
- 递推（recursion）早了一步停下，或者漏掉来自 $\mathrm{I}(a+b,0)$ 的最后一个因子 $\frac{1}{a+b+1}$。

STEP 之外

$\mathrm{I}(a,b)$ 就是贝塔函数 $B(a+1,b+1)$。对所有正实数参数，它与伽玛函数（gamma function）有以下关系：$B(x,y)=\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$。我们的答案正是 $\Gamma(n+1)=n!$ 这个特殊情形。在概率论中，$t^a(1-t)^b/\mathrm{I}(a,b)$ 是贝塔分布（beta distribution）的密度函数（density），而贝塔分布在贝叶斯统计学（Bayesian statistics）中占有核心地位。Blitzstein 与 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率论入门）对此有很精彩的论述，当中包括一个计数论证（counting argument），解释了为甚么答案是 $a!\,b!/(a+b+1)!$。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。