详细解答

# STEP III 1998，第 13 题

概率与统计 · 最大似然估计

> **STEP III 1998，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q13

## 关键思路

这里的未知数是 $n$，而它是整数，所以微积分（calculus）派不上用场：我们无法对 $n$ 求导。要求一个数列（sequence）的最大值，标准的工具是考察相邻两项的比值（ratio）。比值大于 1 时数列上升，一旦跌到 1 以下数列便下降；而出现并列的情况（即有两个最大似然估计，maximum likelihood estimate，简称 MLE），正正就是比值在某处等于 1 的时候。

## 解答

掷一枚公平硬币（fair coin）$n$ 次，所得正面的次数服从二项分布（binomial distribution），所以

$$\mathrm{P}(k \text{ 次正面，共掷} n \text{ 次}) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}, \qquad n \geq k,$$

而若 $n < k$，这个概率是 0。以下一律取 $k \geq 1$（那位朋友至少见过一次正面），所以只有 $n \geq k$ 才是可能的答案。

### 公平硬币的一般计算

对 $n \geq k$，记 $L(n) = \binom{n}{k}2^{-n}$，把它看成 $k$ 固定时 $n$ 的函数。对 $n \geq k$，

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n+1}{n+1-k} \cdot \frac{1}{2},$$

其中用到 $\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n+1-k}\binom{n}{k}$。由于 $n+1-k > 0$，我们可以消去分母而无须改变不等号的方向：

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} \geq 1 \iff n+1 \geq 2(n+1-k) \iff n \leq 2k-1,$$

等号恰好在 $n = 2k-1$ 时成立。因此

$$L(k) < L(k+1) < \cdots < L(2k-1) = L(2k) > L(2k+1) > L(2k+2) > \cdots .$$

**想一想** 比值怎样告诉我们最大值在哪里?

当 $n < 2k-1$ 时, 比值大于 1, 所以每一项都比前一项大: 数列严格递增, 直至 $n = 2k-1$。在 $n = 2k-1$ 时，比值恰好是 1，所以 $L(2k) = L(2k-1)$。当 $n > 2k-1$ 时，比值小于 1，数列自此严格递减。因此最大值恰好在两个 $n$ 的值上取得。

### 一次正面

取 $k = 1$，两个 MLE 是 $n = 2k-1 = 1$ 和 $n = 2k = 2$。直接计算，

$$L(1) = \tfrac{1}{2}, \quad L(2) = 2 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}, \quad L(3) = 3 \cdot \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8},$$

而上面的论证表明 $L(n)$ 在 $n = 2$ 之后一直递减。所以有两个 MLE，即 1 和 2，正如题目所要求。

### $k$ 次正面

根据一般计算，掷硬币次数的两个 MLE 是

$$n = 2k-1 \quad 及 \quad n = 2k.$$

### 偏差硬币

现在设 $0 < p < 1$ 及 $q = 1-p$，于是

$$L(n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad n \geq k.$$

对 $n \geq k$，因子 $p^k$ 互相抵消，并多出一个因子 $q$:

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{(n+1)q}{n+1-k}.$$

同样有 $n+1-k > 0$，所以

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} \gtreqless 1 \iff (n+1)(1-p) \gtreqless n+1-k \iff k \gtreqless (n+1)p \iff n+1 \lesseqgtr \frac{k}{p}.$$

因此 $L$ 在 $n+1 < k/p$ 时递增，在 $n+1 = k/p$ 时持平，而一旦 $n+1 > k/p$ 便递减。留意 $k/p > k$，因为 $p < 1$，所以转折点落在 $n \geq k$ 这个范围之内。

- 若 $k/p$ 不是整数，设 $m = \lfloor k/p \rfloor$。那么 $n+1 < k/p$ 当且仅当 $n+1 \le m$，所以 $L(k) < \cdots < L(m)$，而 $L(m+1) < L(m)$，其后继续递减。此时只有一个 MLE，

$$n = \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor.$$

- 若 $k/p = N$ 是整数，则 $L$ 一直递增至 $L(N-1)$，并有 $L(N) = L(N-1)$，然后递减。此时有两个 MLE，

$$n = \frac{k}{p} - 1 \quad \text{及} \quad n = \frac{k}{p}.$$

  两者都不小于 $k$：由于 $N$ 是整数且 $N > k$，我们有 $N - 1 \ge k$。

所以 MLE 唯一**当且仅当** $k/p$ **不是整数**。对公平硬币而言，$k/p = 2k$ 总是整数，这就是前面各部分总是得到两个 MLE，即 $2k-1$ 和 $2k$ 的原因。

## 验算

- 答案合乎情理：若有 $k$ 次正面，而每次掷出正面的概率是 $p$，我们预计大约掷了 $k/p$ 次，而 MLE 正是 $k/p$ 向下取整（若它是整数，则是其左右并列的两个值）。
- 取 $p = \frac{1}{3}$，$k = 1$，于是 $k/p = 3$。那么 $L(2) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ 而 $L(3) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$，两者并列，而 $L(4) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81} < \frac{4}{9}$。
- 我们用电脑以分数精确计算 $L(n)$，并找出取得最大值的位置：公平硬币取 $k = 1, \ldots, 39$（结果总是 $\{2k-1, 2k\}$），另外还有 924 对 $(p, k)$，其中 $p$ 是分母不超过 12 的分数，且 $k \le 14$。每一个情况都与上述规则吻合。

## 常见错误

- 对 $n$ 求导。这里 $n$ 是整数，而若没有额外的工具，$\binom{n}{k}$ 对其他的 $n$ 值并无定义；比值判别法（ratio test）才是合适的工具。
- 把不等号的方向弄反，或者忘记了正是比值等于 1 才产生第二个 MLE。
- 在所有情况下都答 $\lfloor k/p \rfloor$，而遗漏了 $k/p$ 是整数时的并列情况。

## STEP 之外

最大似然法（maximum likelihood）是统计学中最核心的估计方法：选取令观察所得数据出现的概率最大的参数值。参数通常是连续的，我们会用微积分求对数似然（log-likelihood）的最大值。估计像 $n$ 这样的整数（即“试验次数”问题），则是这个做法失效

的经典例子，而本题更显示 MLE 甚至不一定唯一。Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率入门）对二项分布讲解得很好，而 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率导论）则涵盖了相关的概率背景知识。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。