详细解答

STEP III 1998，第 12 题

概率与统计 · 网络可靠度

STEP III 1998，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s3-q12

关键思路

道路只有六条，所以道路开通与封闭的组合只有 $2^6 = 64$ 种，而最简洁的做法是数算坏的组合：即各村庄分裂成若干组、组与组之间无法互通的那些组合。把坏的组合按仍然开通的道路数目分类，数算就变得很短，因为四条村庄之间若有四条或以上的道路开通，网络（network）绝不可能不连通。

动笔之前先提醒一点：试卷上印出的公式，括号前面是 p^2，但正确的因子是 p^3。印出的版本不可能正确，我们会在“验算”一节说明。我们要证明的是修正后的结果

$$P = 1 - p^3(6p^3 - 12p^2 + 3p + 4).$$

解答

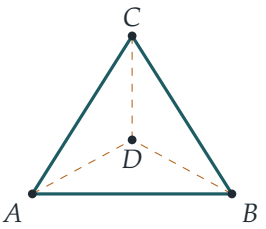
设 $q = 1 - p$ 为某一条道路开通的概率（probability）。由于各条道路的情况互相独立（independent），任何一个有 k 条道路开通、$6 - k$ 条道路封闭的特定组合，其概率为 $q^k p^{6-k}$。设 D 为网络不连通（disconnected）这一事件，即有某村庄无法到达另一条村庄。于是 $P = 1 - \mathbb{P}(D)$，而 $\mathbb{P}(D)$ 就是对所有不连通的组合把 $q^k p^{6-k}$ 加起来的总和。我们按开通道路的数目 k 来数算这些组合。

四条或以上道路开通：绝不会不连通。 如果网络不连通，各村庄便分裂成至少两组，组与组之间没有开通的道路。可能的分法只有 $1+3$（一条孤立的村庄加上其余三条）和 $2+2$ 两种。所有开通的道路都在组内。在 $1+3$ 的分法中，三条村庄的那一组只有 3 条道路；在 $2+2$ 的分法中，每一对只有 1 条道路，合共 2 条。无论哪一种，最多只能有 3 条道路开通。所以凡是有 $k \geq 4$ 条道路开通的组合都是连通（connected）的。

恰好三条道路开通。

? **想一想** 有三条道路开通时，哪些组合无法把四条村庄全部连接起来?

根据上面的论证，有三条开通道路而又不连通的组合，必定是 $1+3$ 的分法，而且三条村庄那一组之内的三条道路全部开通：即一个三角形，第四条村庄被隔绝。孤立的村庄有 4 种选法，所以这样的组合有 4 个。(其余 $\binom{6}{3}-4=16$ 个组合是四面体的生成树 (spanning tree)，它们都是连通的。)



开通的道路 AB, BC, CA（实线）；
通往 D 的道路封闭（虚线）：
D 被隔绝

两条或以下道路开通：必定不连通。 要把四条村庄连接起来，至少需要三条道路（每条道路最多只能把一条新的村庄，接到从 A 出发已能到达的那一组)。所以有两条道路开通的全部 $\binom{6}{2}=15$ 个组合、有一条开通的全部 6 个，以及完全没有道路开通的那 1 个，都是不连通的。

加起来。 因此

$$\mathbb{P}(D)=4p^3q^3+15p^4q^2+6p^5q+p^6=p^3\left(4q^3+15pq^2+6p^2q+p^3\right).$$

现在以 $q=1-p$ 展开括号：

$$\begin{aligned}4(1-p)^3&=4-12p+12p^2-4p^3,\\15p(1-p)^2&=15p-30p^2+15p^3,\\6p^2(1-p)&=6p^2-6p^3,\\p^3&=p^3.\end{aligned}$$

相加后，常数项是 4，p 的各项给出 $-12p+15p=3p$，p^2 的各项给出 $12-30+6=-12$，而 p^3 的各项给出 $-4+15-6+1=6$。所以

$$\mathbb{P}(D)=p^3\left(6p^3-12p^2+3p+4\right),\qquad\text{因此}\qquad P=1-p^3\left(6p^3-12p^2+3p+4\right).$$

验算

▶ $p=0$（没有道路会封闭）给出 $P=1$，而 $p=1$ 给出 $P=1-(6-12+3+4)=0$。两者都正确，但 p^2 的版本同样满足这两点，所以它们无法分辨两个版本。

- p 很小时就能把两者区分开来。网络要不连通，至少要有三条道路封闭（例如连接同一条村庄的那三条），所以当 p 很小时，$\mathbb{P}(D)$ 应该大约是 $4p^3$。我们的公式给出 $\mathbb{P}(D) \approx 4p^3$；印出的公式则会给出 $4p^2$，这是不可能的。
- 当 $p = \frac{1}{3}$ 时，我们的公式给出 $P = 1 - \frac{1}{27} \cdot \frac{105}{27} = \frac{208}{243} \approx 0.856$。用电脑在 21 个 p 值上枚举全部 64 个组合，结果与 p^3 的公式完全吻合；另外在 $p = 0.4$ 时模拟 200 000 场降雪，得到 0.767，而公式的值是 0.7655。

常见错误

- 只数算有孤立村庄的情况，而忘记检查 $2+2$ 的分法。在这一题它们没有带来新的组合：$2+2$ 的分法最多只留下两条开通的道路，所以那些组合已经包括在“两条或以下”的数算之中。但你仍然需要把这一点说明。
- 把互相重叠的事件（例如“A 被隔绝”和“B 被隔绝”）的概率直接相加，而没有修正重叠的部分。以整个组合为单位来数算，就可避免重复计算。
- 相信印出的 p^2，并硬把代数运算凑成那个样子。如果老老实实算出来的结果与“show that”题目所给的不符，就用一个特殊情况来检验。

STEP 之外

这是网络可靠性（network reliability）的一个小例子：图（graph）的每条边各自独立地失效，而我们想求余下的图仍然连通的概率。答案必定是 p 的多项式，其系数数算的是连通生成子图（connected spanning subgraph）的数目（这里对应 $6, 5, 4, 3$ 条开通道路的是 $1, 6, 15, 16$）。对于大型的图，这个多项式在计算上很难求出，并且与 Tutte 多项式（Tutte polynomial）和渗流理论（percolation theory）密切相关。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）是打好概率基础的好选择；Bollobás 的 *Modern Graph Theory*（现代图论）则涵盖随机图（random graph）和 Tutte 多项式。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。