详细解答

STEP III 1998，第 11 题

力学 · 大振幅摆

STEP III 1998，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s3-q11

本题在 *Beyond STEP* 第 11.3 节*真实的摆*中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/real-pendulum.html

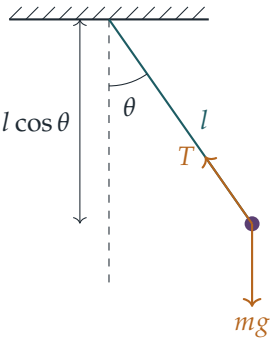
关键思路

能量守恒（energy conservation）给出摆在每个角度的角速率（angular speed），而周期（period）等于四分之一次摆动所需时间的四倍，$\int \mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\theta/\dot{\theta}$。半角恒等式（half-angle identity）$\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ 把能量方程化成被积函数（integrand）的形式。题目建议的代换（substitution）消去了在 $\theta = \gamma$ 处那个棘手的无穷大，剩下的被积函数形如 $(1-x)^{-1/2}$，其中 x 很小，这正是二项展开式（binomial expansion）大派用场的地方。

解答

能量方程

把摆看成一个质量为 m 的质点，系在一条长度为 l 的不可伸长轻绳上，在铅垂平面内摆动，不计空气阻力。角 θ 由向下的铅垂线量起。



摆锤（bob）位于支点下方 $l\cos\theta$ 的深度。张力（tension）沿绳的方向作用，与摆锤的速度（沿圆弧方向）垂直，所以张力不作功；只有重力作功，因此机械能（mechanical energy）守恒。摆锤的速率为 $l\dot{\theta}$。

在最大摆角 $\theta=\gamma$ 处，摆锤瞬时静止。由该处到一般的角度 θ，摆锤下降的高度为 $l\cos\theta - l\cos\gamma$，所以

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = mgl(\cos\theta-\cos\gamma) \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}l\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = g(\cos\theta-\cos\gamma),$$

这就是第一个结果。

周期

对两个余弦都使用 $\cos\alpha = 1-2\sin^2(\alpha/2)$，得

$$\cos\theta-\cos\gamma = 2\big(\sin^2(\gamma/2)-\sin^2(\theta/2)\big),$$

于是能量方程变成

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{4g}{l}\big(\sin^2(\gamma/2)-\sin^2(\theta/2)\big).$$

根据对称性（运动是可逆的，而且能量方程在 $\theta\mapsto-\theta$ 之下不变），四段四分之一摆动 $0\to\gamma\to0\to-\gamma\to0$ 所需的时间相等。在由 $\theta=0$ 到 $\theta=\gamma$ 的那四分之一摆动中，θ 递增，所以取正平方根：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\sin^2(\gamma/2)-\sin^2(\theta/2)\right)^{-1/2}.$$

由 0 积分至 γ，再乘以 4，得

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\gamma}\left(\sin^2(\gamma/2)-\sin^2(\theta/2)\right)^{-1/2}\mathrm{d}\theta,$$

这正是所求。（被积函数在 $\theta=\gamma$ 处趋向无穷大，因为摆锤在该处静止，但积分是收敛（converge）的；下面的代换会清楚显示这一点。）

小振幅近似

记 $k=\sin(\gamma/2)$，其中 $0<\gamma<\pi$，因而 $0<k<1$，并设 $\sin(\theta/2)=k\sin\phi$。当 θ 由 0 变到 γ 时，$\sin\phi$ 由 0 变到 1，所以 ϕ 由 0 变到 $\pi/2$。求导后得

$$\tfrac{1}{2}\cos(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta = k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi.$$

由于 $0\le\theta/2<\pi/2$ 及 $0\le\phi\le\pi/2$，两个余弦都非负，所以

$$\cos(\theta/2)=\sqrt{1-k^2\sin^2\phi},\qquad \left(k^2-k^2\sin^2\phi\right)^{1/2}=k\cos\phi.$$

> **想一想** 在这个代换之下，那个麻烦的因子 $(\sin^2(\gamma/2)-\sin^2(\theta/2))^{-1/2}$ 会变成甚么?

它变成 $1/(k\cos\phi)$，而 $\mathrm{d}\theta$ 中的 $k\cos\phi$ 恰好把它完全约去：

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\left(k^2-\sin^2(\theta/2)\right)^{1/2}}=\frac{1}{k\cos\phi}\cdot\frac{2k\cos\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=\frac{2\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

因此

$$P=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\left(1-k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2}\mathrm{d}\phi,$$

这个积分的被积函数性质十分良好。（到此为止，一切都是精确的。）

当 γ 很小时，$x=k^2\sin^2\phi$ 满足 $0\le x\le k^2$，而这个上界很小，所以由二项展开式 $(1-x)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots$ 得

$$\left(1-k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2}\approx 1+\tfrac{1}{2}k^2\sin^2\phi,$$

误差的阶为 k^4。由于 $\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi=\frac{\pi}{4}$，

$$P\approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k^2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{k^2}{4}\right).$$

最后，当 γ 很小时，$k=\sin(\gamma/2)\approx\gamma/2$（误差的阶为 γ^3），所以 $k^2\approx\gamma^2/4$，只相差阶为 γ^4 的项，于是

$$P\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}\right),$$

这正是所求。首项是大家熟悉的小幅振荡周期；修正项则说明摆幅愈大，摆动所需的时间略长。

验算

- 当 $\gamma \to 0$ 时，我们重新得到 $2\pi\sqrt{l/g}$，即由线性化方程 $\ddot{\theta} = -(g/l)\theta$ 所得的周期。
- 量纲（dimensions）：$\sqrt{l/g}$ 是时间，而 γ 是无量纲的。
- 数值上，取 $l/g = 1.7/9.81$ 及 $\gamma = 0.5$，以步长很小的龙格－库塔（Runge–Kutta）方法逐步求解方程 $\ddot{\theta} = -(g/l)\sin\theta$，得 $P = 2.65705$，与精确的 ϕ 积分在所示的各位数字上完全吻合；近似公式则给出 2.65646，相对误差约为 2×10^{-4}。该误差与 γ^4 成比例（约为 $0.0036\gamma^4$），由此确认 γ^2 项是正确的。

常见错误

- 忘记因子 4：由 0 到 γ 的积分只是四分之一个周期。
- 在展开之前，就在代换中使用 $\cos(\theta/2) \approx 1$。这样会丢掉一个 $k^2\sin^2\phi$ 项，而它与你要找的修正项同阶；应把 $\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}$ 保持精确，直到使用二项展开的那一步。
- 停在 $1 + k^2/4$，没有把 $k = \sin(\gamma/2)$ 换成 $\gamma/2$。

STEP 之外

精确积分 $\int_0^{\pi/2}(1 - k^2\sin^2\phi)^{-1/2}\,\mathrm{d}\phi$ 就是*第一类完全椭圆积分*（complete elliptic integral of the first kind）$K(k)$，所以精确的周期是 $4\sqrt{l/g}\,K(\sin(\gamma/2))$。把二项级数继续展开下去，可得 $1 + \frac{1}{16}\gamma^2 + \frac{11}{3072}\gamma^4 + \cdots$，而高斯（Gauss）发现，利用算术几何平均（arithmetic–geometric mean）可以极快地计算 K。周期取决于振幅这一事实，是非线性振荡（nonlinear oscillation）最简单的例子。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）以大学一年级的程度讨论了摆与振荡。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。