详细解答

STEP III 1998，第 10 题

力学 · 斜碰撞

> **STEP III 1998，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s3-q10

关键思路

由于两球质量相等，质量在两条守恒定律中都可以约去，剩下两个简洁的向量关系：速度之和不变，以及速率平方之和不变。比较 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$ 与 $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$，便可分离出纯量积（scalar product）$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，而整条题目的每一部分都由这一个量带动。在最后一部分，只要知道第二个球的速度，动量便决定了第一个球的速度，于是能量方程变成只含一个未知速率的二次方程，而有实根的二次方程，其判别式（discriminant）必为非负。

解答

把两球看作质量同为 m 的光滑球体，在光滑桌面上运动，因此碰撞期间水平方向的力只有两球互相施加的力。

守恒定律与相对速率

由动量（momentum）和动能（kinetic energy）守恒，得

$$m\mathbf{v}_1+m\mathbf{v}_2=m\mathbf{v}_1'+m\mathbf{v}_2',$$
$$\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1|^2+\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2|^2=\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_1'|^2+\tfrac{1}{2}m|\mathbf{v}_2'|^2,$$

即

$$\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_2' \quad (1), \qquad |\mathbf{v}_1|^2+|\mathbf{v}_2|^2=|\mathbf{v}_1'|^2+|\mathbf{v}_2'|^2 \quad (2).$$

把 (1) 的两边各自与自身取纯量积：

$$|\mathbf{v}_1|^2+|\mathbf{v}_2|^2+2\,\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=|\mathbf{v}_1'|^2+|\mathbf{v}_2'|^2+2\,\mathbf{v}_1'\cdot\mathbf{v}_2'.$$

减去 (2)，余下

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2'. \qquad (3)$$

相对速率（relative speed）的平方是

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 - 2\,\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2,$$

而根据 (2) 和 (3)，右边每一项在碰撞前后都相同。所以 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|^2$，又因为速率为非负，故 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2'|$：相对速率守恒。

其中一球起初静止

设 $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$。则由 (3) 得

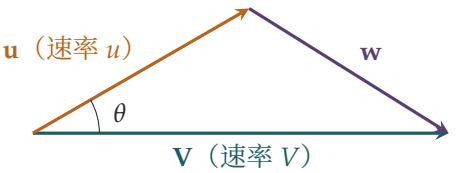
$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{0} = 0.$$

由于碰撞后两球都在运动，$\mathbf{v}_1' \neq \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{v}_2' \neq \mathbf{0}$，所以纯量积为零即表示两个末速度互相垂直。（若没有这个条件，纯量积为零可能只是因为其中一个速度为零，例如正面碰撞（head-on collision）的情况，此时两球只是互换速度。）

损失能量的碰撞

现在 (1) 仍然成立，但 (2) 不再成立。把静止的球称为 A，运动的球称为 B。设 B 的初速度为 $\mathbf{V}$，其中 $|\mathbf{V}| = V$，末速度为 $\mathbf{u}$，速率为 u，与 $\mathbf{V}$ 成角 θ。设 A 的末速度为 $\mathbf{w}$。

由动量守恒得 $\mathbf{V} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$，所以三个速度构成一个三角形：



因此 $\mathbf{w} = \mathbf{V} - \mathbf{u}$，而由于 $\mathbf{V} \cdot \mathbf{u} = Vu\cos\theta$，

$$|\mathbf{w}|^2 = V^2 - 2Vu\cos\theta + u^2$$

（即三角形中的余弦定理（cosine rule））。最终动能是初始动能的 $1-k$ 倍。约去 $\frac{1}{2}m$，

$$u^2 + |\mathbf{w}|^2 = (1-k)V^2 \quad \Longrightarrow \quad 2u^2 - 2Vu\cos\theta + V^2 = (1-k)V^2,$$

所以第二个球的末速率 u 满足

$$\boxed{2u^2 - 2Vu\cos\theta + kV^2 = 0.}$$

想一想 题目只要求我们证明 $k \le \frac{1}{2}$。我们手上只有一条方程，不等式从何而来？

速率 u 是一个实际出现的实数，所以这条关于 u 的二次方程确实有实根。因此它的判别式必为非负：

$$4V^2\cos^2\theta - 8kV^2 \ge 0 \quad \Longrightarrow \quad k \le \tfrac{1}{2}\cos^2\theta \le \tfrac{1}{2},$$

当中我们除以 $8V^2 > 0$（第二个球在运动），并用了 $\cos^2\theta \le 1$。所以 $k \le \frac{1}{2}$，正是所求。

等号成立需要 $\cos^2\theta = 1$，并且有重根 $u = \frac{1}{2}V\cos\theta$。由于 $u \ge 0$，这表示 $\theta = 0$ 及 $u = \frac{1}{2}V$，于是 $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{V}$ 亦然：两球以一半的速率一同离开，这正是完全非弹性（perfectly inelastic）的正面碰撞。动能最多只能损失一半。

验算

- $k = 0$ 时得 $2u^2 = 2Vu\cos\theta$，所以 $u = V\cos\theta$（或 $u = 0$）。此时 $\mathbf{w} = \mathbf{V} - \mathbf{u}$ 与 $\mathbf{u}$ 垂直，因为 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{V}-\mathbf{u}) = Vu\cos\theta - u^2 = 0$。这与第二部分吻合。
- 恢复系数（coefficient of restitution）为 e 的正面碰撞给出 $k = \frac{1}{2}(1-e^2)$，其值介乎 0 与 $\frac{1}{2}$ 之间。取 $e = 0.3$，得 $k = 0.455$。
- 数值方面，我们模拟了 10^5 次质量相等的光滑球体的随机弹性碰撞（elastic collision）。动量、动能、$\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2$ 和相对速率全部吻合，误差在 10^{-13} 以内。在 2×10^5 个随机的能量损失结果中，该二次方程成立，误差在 10^{-14} 以内，而所得最大的 k 为 0.49999。

常见错误

- 把“相对速率”当作 $\big||\mathbf{v}_1| - |\mathbf{v}_2|\big|$。它其实是相对速度的大小，即 $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$。
- 在第二部分，忘记使用两球都在运动这一事实。只有当两个向量都不是零向量时，纯量积为零才表示互相垂直。
- 在最后一部分，再次使用 (2) 或 (3)。它们来自动能守恒，而动能守恒已不再成立。只有动量守恒仍然有效。

STEP 之外

这个纯量积论证，其实是一个标准技巧的不依赖参考系的版本：在零动量参考系（zero-momentum frame）中，弹性碰撞只是把两个速度旋转，而大小保持不变。最大损失为 $\frac{1}{2}$，反映的是一个普遍事实：只有相对于质心（centre of mass）的动能才可以损失，在这里就是 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mV^2$。这些想法通往散射理论（scattering theory），以及狭义相对论（special

relativity）中的碰撞。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对质心参考系中的碰撞有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。