详细解答

STEP III 1998，第 1 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP III 1998，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s3-q1

关键思路

把所有式子都用 $\cos x$ 表示：利用 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$，函数 f 便成为 $\cos x$ 的二次式。配方（completing the square）之后，f 的值域（range）一目了然，而最后一部分正是由这个值域决定。至于 g，用商法则（quotient rule）求得的导数（derivative）是 $\mathrm{f}'(x)$ 的常数倍再除以一个平方。

解答

描绘 $y = \mathrm{f}(x)$ 的图像

利用 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$，

$$\mathrm{f}(x) = 2 + 2\cos x - \cos^2 x = 3 - (1 - \cos x)^2.$$

由于 $0 \le 1 - \cos x \le 2$，可得 $-1 \le \mathrm{f}(x) \le 3$。当 $\cos x = 1$ 时取得值 3，当 $\cos x = -1$ 时取得值 -1。

求导得

$$\mathrm{f}'(x) = -2(1 - \cos x)\sin x = 2\sin x\,(\cos x - 1).$$

当 $\sin x = 0$ 或 $\cos x = 1$ 时，上式为零；在 $[0, 2\pi]$ 上，即 $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$。驻点（stationary point）为

$$(0,\ 3), \qquad (\pi,\ -1), \qquad (2\pi,\ 3).$$

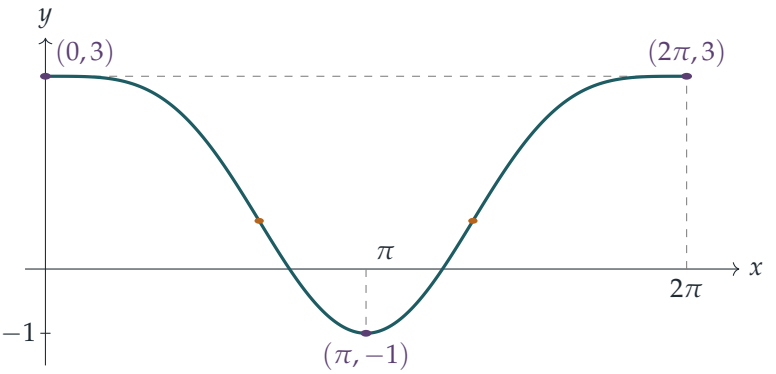
在 $(0, \pi)$ 上，$\sin x > 0$ 而 $\cos x - 1 < 0$，所以 $\mathrm{f}' < 0$，f 递减。在 $(\pi, 2\pi)$ 上，$\sin x < 0$ 而 $\cos x - 1$ 仍然是负数，所以 $\mathrm{f}' > 0$，f 递增。因此 $(\pi, -1)$ 是极小点（minimum），而端点 $(0, 3)$ 和 $(2\pi, 3)$ 是极大点（maximum）。

想一想 曲线在 $x = 0$ 附近是甚么样子？像抛物线吗？

不像，它比抛物线更平坦。在 $x = 0$ 附近，$1 - \cos x \approx \frac{1}{2}x^2$，所以 $\mathrm{f}(x) \approx 3 - \frac{1}{4}x^4$。曲线在顶部非常平坦，这与 $\mathrm{f}''(0) = 0$ 吻合。在 $x = \pi$ 附近，设 $x = \pi + t$，则 $1 - \cos x = 1 + \cos t \approx 2 - \frac{1}{2}t^2$，所以 $\mathrm{f} \approx -1 + 2t^2$：这是一个普通的抛物线形极小点。

描绘图像时还有以下几个有用的特征：

- 曲线关于 $x = \pi$ 对称，因为 $\cos(2\pi - x) = \cos x$。
- 曲线与 x 轴相交于 $(1 - \cos x)^2 = 3$ 之处，即 $\cos x = 1 - \sqrt{3}$。由此得 $x = \arccos(1 - \sqrt{3}) \approx 2.39$ 和 $x = 2\pi - \arccos(1 - \sqrt{3}) \approx 3.89$。
- $\mathrm{f}''(x) = 2\cos 2x - 2\cos x = 2(2\cos x + 1)(\cos x - 1)$。它在 $\cos x = -\frac{1}{2}$ 处变号，所以拐点（point of inflection）位于 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$ 和 $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$。



琥珀色的点是拐点。

g 的驻点

根据商法则，凡是 $c\,\mathrm{f}(x) + d \neq 0$ 之处，

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{a\mathrm{f}'(x)\big(c\mathrm{f}(x) + d\big) - c\mathrm{f}'(x)\big(a\mathrm{f}(x) + b\big)}{\big(c\mathrm{f}(x) + d\big)^2} = \frac{(ad - bc)\,\mathrm{f}'(x)}{\big(c\mathrm{f}(x) + d\big)^2}.$$

由于 $ad \neq bc$，在 g 有定义的每一点上，$\mathrm{g}'(x) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{f}'(x) = 0$。所以除了 f 的驻点之外，g 没有其他驻点。

我们还需要 g 在 $x = 0, \pi, 2\pi$ 处有定义，另外两个条件正是为此而设。在 $x = 0$ 和 $x = 2\pi$ 处，分母是 $3c + d$，因为 $d \neq -3c$，所以它不等于零。在 $x = \pi$ 处，分母是 $d - c$，因为 $d \neq c$，所以它不等于零。因此 $y = \mathrm{g}(x)$ 的驻点恰好位于 $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$，正如题目所求，

并且

$$\mathrm{g}(0) = \mathrm{g}(2\pi) = \frac{3a+b}{3c+d}, \qquad \mathrm{g}(\pi) = \frac{b-a}{d-c}.$$

$|\mathrm{g}|$ 何时有界

假设 $d/c < -3$ 或 $d/c > 1$。特别地，$c \neq 0$，所以可以写成

$$c\,\mathrm{f}(x) + d = c\left(\mathrm{f}(x) + \frac{d}{c}\right).$$

由于 $\mathrm{f}(x)$ 在 $[-1,3]$ 内取值，括号内的式子落在 $\left[\frac{d}{c} - 1,\ \frac{d}{c} + 3\right]$ 之内。

- 若 $d/c > 1$，括号内的式子至少是 $\frac{d}{c} - 1 > 0$。
- 若 $d/c < -3$，括号内的式子至多是 $\frac{d}{c} + 3 < 0$。

无论哪种情况，都存在常数 $k > 0$，使得对所有 x 都有 $\left|c\,\mathrm{f}(x) + d\right| \geq |c|\,k$。换句话说，分母始终与零保持一段距离。分子是有界（bounded）的，因为 $|a\mathrm{f}(x) + b| \leq 3|a| + |b|$。因此对 $[0, 2\pi]$ 内的每个 x，都有

$$|\mathrm{g}(x)| \leq \frac{3|a| + |b|}{|c|\,k}$$

所以 $|\mathrm{g}(x)|$ 不可能任意大。

> ? **想一想** 如果 $-3 < d/c < 1$，会出甚么问题?

这时 $-d/c$ 严格介乎 -1 与 3 之间。由于 f 连续（continuous），并且取遍 $[-1,3]$ 内的每一个值，所以存在某个 x 使得 $\mathrm{f}(x) = -d/c$，分母在该处等于零。分子在同一点却不等于零：假如两者同时为零，便有 $a(-d/c) + b = 0$，即 $ad = bc$。所以 g 有一条铅垂渐近线（vertical asymptote），$|\mathrm{g}|$ 无界。由此可见，最后一部分的条件恰到好处，不多也不少。

验算

- 以数值计算，在 $[0, 2\pi]$ 上取一个细密的网格，f 的最小值是 -1，最大值是 3。此外 $3 - \mathrm{f}(0.1) \approx 2.496 \times 10^{-5}$，而 $\frac{1}{4}(0.1)^4 = 2.5 \times 10^{-5}$，印证了曲线在 $x = 0$ 处的四次平坦性。
- 一个特殊情况：取 $a = 1$、$b = 0$、$c = 0$、$d = 1$，则 $\mathrm{g} = \mathrm{f}$，而公式给出 $\mathrm{g}(0) = 3$ 和 $\mathrm{g}(\pi) = -1$，与预期相符。
- 随机选取 a, b, c, d，以有限差分（finite difference）计算 g 的导数，结果与 $(ad - bc)\mathrm{f}'/(c\mathrm{f} + d)^2$ 一致。

常见错误

- 遗漏端点 $x = 0$ 和 $x = 2\pi$ 这两个驻点。f′ 在这两处确实等于零。
- 忘记检查 g 在 f 的驻点处是否有定义。条件 $d \neq -3c$ 和 $d \neq c$ 正是为此而设。
- 在 $x = 0$ 处把顶部画成尖削的抛物线形状。曲线在那里其实平坦得多。

STEP 之外

当 $ad \neq bc$ 时，映射 $t \mapsto \dfrac{at+b}{ct+d}$ 称为莫比乌斯变换（*Möbius transformation*）。它是可逆（invertible）的，而且它的导数 $(ad-bc)/(ct+d)^2$ 永不为零，所以与它复合既不会产生新的驻点，也不会令原有的驻点消失。莫比乌斯映射在复分析（complex analysis）和几何中占有核心地位，并且在复合运算下构成一个群（group）。想看一本以图像为主、赏心悦目的介绍，可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。