详细解答

STEP II 1998，第 9 题

力学 · 桁架的静力学

STEP II 1998，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s2-q9

关键思路

框架是轻质的（light），所以只有两个外力作用在它上面：A 处的支承力和 C 处的重量。两个力要达致平衡（equilibrium），必须大小相等、方向相反，并且沿同一直线作用；这就同时决定了支承力和六边形的悬挂方式。之后便是节点法（method of joints）：从只有两枝杆相交的节点入手，分解（resolve）各力，然后沿六边形逐个节点推进，每次都移到最多只有两个未知力的节点。

解答

支承力

把六边形的各边和三枝对角杆视为轻杆（light rod），在六个顶点处以光滑铰接（smoothly pinned）相连，并以 W 表示 1 kg 质量的重量，所以 $W = g \approx 9.8\,\mathrm{N}$。各杆都是轻质的，因此作用于整个框架（framework）的外力只有 A 处支承所施的力 $\mathbf{R}$，以及在 C 处铅垂向下作用的重量 W。

? **想一想** 框架可以随我们喜欢以任何角度悬挂吗？

不可以。就整个框架而言，各力之和必须为零，而且总力矩（moment）也必须为零。对 A 取力矩，支承力没有力矩，所以 C 处的重量对 A 的力矩也必须为零。这只有在 C 位于 A 正下方时才会发生。因此框架悬挂时，短对角线 AC 是铅垂的，而分解各力可得

$$\mathbf{R} = W \text{ 铅垂向上}, \qquad |\mathbf{R}| = g \approx 9.8\,\mathrm{N},$$

即 1 kg 的重量，沿 CA 作用。

各杆中的力

取边长为 1（各力与边长无关）。当 AC 铅垂时，B 位于 AC 的一半高度处，在它的一侧，而六边形的其余部分则在另一侧：F 与 A 同高，E 与 B 同高，D 与 C 同高。所以 AF、BE 和 CD 是水平的，边 AB、BC、DE、EF 与水平线成 $60°$，而短对角线 BD、BF 与水平线成 $30°$。

设 T_{XY} 为杆 XY 中的张力（tension）；在杆的每一端，它都把节点拉向另一端。张力为负，表示该杆受推力（thrust）。

> **想一想** 共有九个未知的杆力。我们应从哪里入手?

从只有两枝杆相交的节点入手，因为这样两条方程（水平和铅垂方向）便可以立即解出。节点 C 只连着 CB 和 CD，而且负载就挂在这里。

节点 C。杆 CB 指向水平线以上 $60°$，而 CD 是水平的，背向 B 的一侧。分解各力，

$$\begin{aligned} &\text{铅垂方向:} \quad T_{BC}\sin 60° = W \;\Rightarrow\; T_{BC} = \tfrac{2W}{\sqrt{3}}, \\ &\text{水平方向:} \quad T_{CD} = T_{BC}\cos 60° = \tfrac{W}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

节点 D。现在只有 DE 和 DB 是未知的。从 D 看，杆 DC 沿水平方向指向 B 的一侧，DE 指向水平线以上 $60°$ 并背向该侧，而 DB 指向水平线以上 $30°$ 并朝向该侧。分解各力，

$$\begin{aligned} &\text{铅垂方向:} \quad T_{DE}\sin 60° + T_{BD}\sin 30° = 0 \;\Rightarrow\; T_{BD} = -\sqrt{3}\,T_{DE}, \\ &\text{水平方向:} \quad T_{CD} - T_{DE}\cos 60° + T_{BD}\cos 30° = 0 \;\Rightarrow\; T_{CD} - \tfrac{1}{2}T_{DE} - \tfrac{3}{2}T_{DE} = 0, \end{aligned}$$

所以 $T_{DE} = \frac{1}{2}T_{CD} = \frac{W}{2\sqrt{3}}$，而 $T_{BD} = -\frac{W}{2}$。

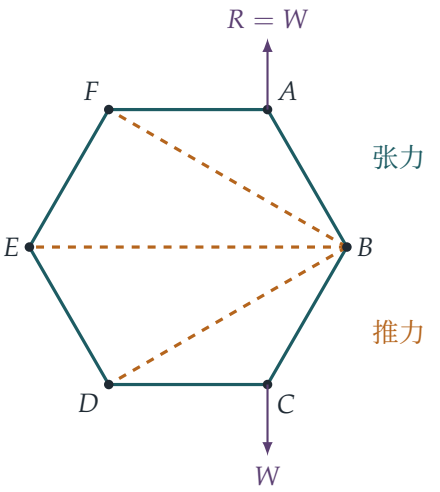
节点 E。杆 ED 指向水平线以下 $60°$，EF 指向水平线以上 $60°$，而 EB 是水平的，三者都朝向 B 的一侧。沿铅垂方向分解，得 $T_{EF} = T_{DE} = \frac{W}{2\sqrt{3}}$。沿水平方向分解，

$$\tfrac{1}{2}T_{DE} + \tfrac{1}{2}T_{EF} + T_{BE} = 0 \;\Rightarrow\; T_{BE} = -\tfrac{W}{2\sqrt{3}}.$$

节点 F。这是节点 D 对直线 BE 的镜像。沿铅垂方向分解，$T_{BF} = -\sqrt{3}\,T_{EF} = -\frac{W}{2}$；沿水平方向，$T_{FA} = 2T_{EF} = \frac{W}{\sqrt{3}}$。

节点 A。水平方向，$T_{AB}\cos 60° = T_{FA}$，所以 $T_{AB} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$。铅垂方向，$R = T_{AB}\sin 60° = W$，与第一部分的结果一致。

节点 B 还会给出两条方程，但它们自动成立：整个框架本身已经处于平衡。验证这两条方程，是检查运算有否出错的好方法。



总结如下，其中 $W = g$：

- 六条边全部受张力：AB 和 BC 承受 $\frac{2W}{\sqrt{3}}$，CD 和 FA 承受 $\frac{W}{\sqrt{3}}$，DE 和 EF 承受 $\frac{W}{2\sqrt{3}}$；
- 三枝内杆全部受推力：BD 和 BF 承受 $\frac{W}{2}$，而 BE 承受 $\frac{W}{2\sqrt{3}}$。

所以 BE 中的力是推力，大小为

$$\frac{g}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}g}{6} \approx 2.83\,\text{N}.$$

验算

- 对称性：对直线 BE 作反射，会把 $A \leftrightarrow C$ 和 $F \leftrightarrow D$ 互换，并把 A 处向上的力 W 变成 C 处向下的力 W。所以负载是对称的，答案也应该对称：$T_{AB} = T_{BC}$，$T_{FA} = T_{CD}$，$T_{EF} = T_{DE}$，$T_{BF} = T_{BD}$。结果确实如此。
- 节点 B：水平方向，两条边向一方给出 $2 \cdot \frac{2W}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}$，而 BD、BF、BE 向另一方给出 $2 \cdot \frac{W}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$；铅垂方向，$AB$ 和 BC 互相抵消，BD 和 BF 亦然。
- 我们取 $g = 9.8$，以数值方法解出全部十二条节点方程：它们互相一致，给出 $R = 9.8\,\text{N}$ 向上，以及 $|T_{BE}| \approx 2.829\,\text{N}$ 的推力；而若 AC 倾斜，方程便无解。

常见错误

- 把六边形画成有一条边或一条长对角线是铅垂的。悬挂位置是被迫确定的：C 在 A 的下方。

▶ 在不同节点之间混淆正负号的约定。一开始就定下“张力把节点拉向杆的另一端”，然后让负的答案告诉你哪些杆受推力。

STEP 之外

一个有 j 个节点的框架，当它恰好有 $2j-3$ 枝杆时，便是刚性（rigid）而且静定（statically determinate）的：这里 $2\cdot 6-3=9$，这就是为何单靠静力学便可求出各力。若杆的数目更多，结构便有“冗余”，这时就需要考虑杆的弹性；这是结构力学的起点，也是图的刚性理论这门数学的起点。想了解背后的向量力学，可读 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。