详细解答

STEP II 1998，第 8 题

纯数学 · 向量几何

> **STEP II 1998，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q8

关键思路

这里的一切，都在于把每条直线写成“点 + 参数（parameter）× 方向”的形式，然后巧妙地选取参数。各式子对 **a**、**b**、**c** 是对称（symmetric）的，所以如果某个参数值给出的答案对这三个向量对称，那么同一点就位于全部三条直线上。这正是题目中“凭观察”（by inspection）一语要我们去找的东西。

解答

三条中线（median）交于 R

BC 的中点（mid-point）的位置向量（position vector）为 $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$，所以由 A 到该中点的直线为

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{a}\right) = (1-s)\mathbf{a} + \tfrac{s}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

我们希望三个系数相等，使结果对称：由 $1-s=\frac{s}{2}$ 得 $s=\frac{2}{3}$，而该点为

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

由 B 和由 C 出发的直线，可把 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 循环置换而得，而同样取 $s=\frac{2}{3}$，便在每条直线上得出同一个对称的点。因此三条直线都通过点 R，其位置向量为

$$\mathbf{r}_R = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

即三角形的形心（centroid）。（由于 A、B、C 构成一个真正的三角形，这些直线中没有两条重合，所以 R 是它们唯一的公共点。）

三条平行线交于 Q

设 P 的位置向量为 $\mathbf{p}$。三条直线分别是

$$\begin{aligned}
&\text{通过}BC\text{ 的中点，且平行于}PA: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) + \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{p}),\\
&\text{通过}CA\text{ 的中点，且平行于}PB: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{b}-\mathbf{p}),\\
&\text{通过}AB\text{ 的中点，且平行于}PC: \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \nu(\mathbf{c}-\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

想一想 λ 取甚么值，才会使第一个式子对 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 对称?

在第一条直线中，$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 的系数各为 $\frac{1}{2}$，而 $\mathbf{a}$ 的系数是 λ；要令它们一致，便需要 $\lambda = \frac{1}{2}$。于是

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}).$$

在另外两条直线中取 $\mu = \frac{1}{2}$ 和 $\nu = \frac{1}{2}$，得到的是完全相同的向量。因此三条直线都通过点 Q，其中

$$\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{p}).$$

PQ 与平面 ABC 交于 R

首先，$Q \neq P$：假如 $\mathbf{q} = \mathbf{p}$，则 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 3\mathbf{p}$，所以 $\mathbf{p} = \mathbf{r}_R$，$P$ 便会是点 R，而这一点位于平面 ABC 上。所以 PQ 确实是一条直线，即

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q}-\mathbf{p}) = \mathbf{p} + t\left(\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{3}{2}\mathbf{p}\right).$$

要消去含 $\mathbf{p}$ 的项，我们需要 $1 - \frac{3}{2}t = 0$，即 $t = \frac{2}{3}$，这时

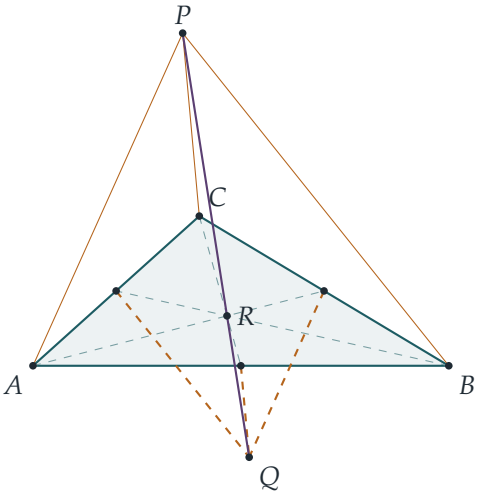
$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{p} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{r}_R.$$

所以 R 位于直线 PQ 上。它同时位于平面 ABC 上（它在由 A 出发的中线上，而这条中线位于该平面内）。

想一想 PQ 会不会还在别处与这个平面相交?

不会。一条直线与一个平面或者没有交点，或者恰好有一个交点，或者整条位于平面之内。直线 PQ 并不在平面 ABC 内，因为 P 在这条直线上，而 P 不在该平面上。所以它与平面最多只有一个交点，而这个交点就是 R。这就证明了 PQ 与平面 ABC 交于 R。

额外的收获是，$t = \frac{2}{3}$ 告诉我们 R 把 PQ 按比 $PR : RQ = 2:1$ 分割；等价地，$\mathbf{q} - \mathbf{r}_R = -\frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{r}_R)$。



验算

- 每个声称的交点都可以代回去检验：例如 $\mathbf{q}-\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{p})$，显然平行于 PA。
- 取 $A=(0,0,0)$、$B=(3,0,0)$、$C=(0,3,0)$ 和 $P=(0,0,3)$，我们得到 $R=(1,1,0)$ 和 $Q=(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$；由 P 到 Q 的三分之二处的点是 $(1,1,0)=R$，位于平面 $z=0$ 上。
- 我们还用精确的有理数运算，对 2000 组随机选取的 A、B、C、P 检验了所有结果：直线 PQ 每次都与平面 ABC 交于 R，参数为 $t=\frac{2}{3}$。

常见错误

- 解方程求出其中两条直线上的公共点后，忘记检查它是否也在第三条直线上。
- 证明了 R 位于 PQ 上，却没有解释为何它就是 PQ 与平面唯一的交点；“P 不在平面上”这个条件正是用在这里。

STEP 之外

这个结果背后有一个简洁的几何原因。以 R 为中心、比例因子（scale factor）为 $-\frac{1}{2}$ 的放大（enlargement）（即映射 $\mathbf{x}\mapsto\mathbf{r}_R-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{r}_R)$）把 A、B、C 分别送到 BC、CA、AB 的中点，并把任何直线送到与之平行的直线。所以它把交于 P 的直线 PA、PB、PC 变成那三条新直线，因而这三条新直线必定交于 P 的像；这个像就是 Q，而 P、R、Q 共线（collinear），因为放大的中心与每一点及其像都共线。通过变换（仿射映射（affine map）及其不动点（fixed point））来思考几何，是大学一年级线性代数（linear algebra）的一

个核心思想；Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教材）是了解这个思想如何展开的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。