详细解答

STEP II 1998，第 7 题

纯数学 · 以导数证明不等式

STEP II 1998，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s2-q7

关键思路

每个不等式（inequality）的证法都一样：函数在 $x = 0$ 处为零，而它的导数（derivative）为正，所以函数由零开始上升。巧妙之处在于这些函数是环环相扣的。g 的导数原来与 f 有关，而 h 的导数原来就是 g 在 $2x$ 处的值。因此每一部分都为下一部分提供所需的正导数。在第 (iv) 部分，取对数（logarithm）可把商（quotient）F 化为和，而 F'/F 的正负号就是第 (iii) 部分那个式子的正负号。

解答

全题所用的工具是：若 ϕ 可微（differentiable），$\phi(0) = 0$，且当 $0 < x < a$ 时 $\phi'(x) > 0$，则 ϕ 在 $[0, a)$ 上严格递增（strictly increasing），所以当 $0 < x < a$ 时 $\phi(x) > \phi(0) = 0$。（根据中值定理（mean value theorem），存在某个 $c \in (0, x)$ 使得 $\phi(x) = \phi(x) - \phi(0) = x\,\phi'(c)$，而这是正数。）

第 (i) 部分

我们有 $\mathrm{f}(0) = \tan 0 - 0 = 0$，而且

$$\mathrm{f}'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x.$$

当 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 时，$\tan x$ 有定义且为正，所以 $\mathrm{f}'(x) > 0$。因此当 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 时 $\mathrm{f}(x) > 0$；也就是说，在该范围内 $\tan x > x$。

第 (ii) 部分

同样地，$g(0) = 2 - 2 - 0 = 0$。求导，并对 $x \sin x$ 使用积法则（product rule），

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\sin x - (\sin x + x\cos x) \\ &= \sin x - x\cos x \\ &= \cos x\,(\tan x - x) = \cos x\, f(x). \end{aligned}$$

当 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 时，我们有 $\cos x > 0$，而由第 (i) 部分知 $f(x) > 0$。所以 $g'(x) > 0$，又因为 $g(0) = 0$，可知当 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 时 $g(x) > 0$。

第 (iii) 部分

这次同样有 $h(0) = 0$。求导，

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2 + \cos 2x - 2x\sin 2x - 3\cos 2x \\ &= 2 - 2\cos 2x - 2x\sin 2x. \end{aligned}$$

> **想一想** 你以前见过这个式子吗?

它就是把 g 中的 x 换成 $2x$：

$$h'(x) = 2 - 2\cos(2x) - (2x)\sin(2x) = g(2x).$$

若 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$，则 $0 < 2x < \frac{1}{2}\pi$，所以由第 (ii) 部分知 $g(2x) > 0$。这就是为甚么范围现在是 $\frac{1}{4}\pi$ 而不是 $\frac{1}{2}\pi$。所以在 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 上 $h'(x) > 0$，再加上 $h(0) = 0$，便得出当 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 时 $h(x) > 0$。

至于“由此”的部分，用二倍角（double angle）公式改写题目所给的式子。由于 $\sin^2 x + 3\cos^2 x = 1 + 2\cos^2 x = 2 + \cos 2x$ 及 $3\sin x\cos x = \frac{3}{2}\sin 2x$，

$$\begin{aligned} x(\sin^2 x + 3\cos^2 x) - 3\sin x\cos x &= x(2 + \cos 2x) - \tfrac{3}{2}\sin 2x \\ &= 2x + x\cos 2x - \tfrac{3}{2}\sin 2x = h(x). \end{aligned}$$

所以该式子正正就是 $h(x)$，而它在 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 时为正，这正是所需的结果。

第 (iv) 部分

当 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 时，x、$\sin x$ 和 $\cos x$ 这几个量全为正，所以 $F(x) > 0$，我们可以取对数：

$$\ln F(x) = \ln x + \tfrac{1}{3}\ln\cos x - \ln\sin x.$$

两边对 x 求导，

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x} - \frac{\sin x}{3\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}.$$

想一想 怎样看出它的正负号?

把它通分，公分母（common denominator）为 $3x\sin x\cos x$，在这个区间上是正数：

$$\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{3\sin x\cos x - x\sin^2 x - 3x\cos^2 x}{3x\sin x\cos x}$$
$$= -\frac{x(\sin^2 x + 3\cos^2 x) - 3\sin x\cos x}{3x\sin x\cos x} = -\frac{\mathrm{h}(x)}{3x\sin x\cos x}.$$

由第 (iii) 部分，分子 $\mathrm{h}(x)$ 为正，分母亦为正，所以 $\mathrm{F}'(x)/\mathrm{F}(x) < 0$。由于 $\mathrm{F}(x) > 0$，两边乘以它便得出当 $0 < x < \frac{1}{4}\pi$ 时 $\mathrm{F}'(x) < 0$，这正是所需的结果。

验算

- 抽查数值：$\mathrm{F}(0.1) \approx 0.999998$、$\mathrm{F}(0.5) \approx 0.99849$ 及 $\mathrm{F}(\frac{1}{4}\pi) \approx 0.98954$，所以 F 是递减的，只是减得很慢。
- 在 0 附近，这些不等式非常紧。展开成麦克劳林级数（Maclaurin series）可得 $\mathrm{h}(x) = \frac{4}{15}x^5 + \cdots$，而 x, x^3 两项互相抵消。这就是为甚么你不能单凭观察就“看出” $\mathrm{h} > 0$，而需要这一连串导数。数值上，$\mathrm{h}(0.01)/0.01^5 \approx 0.26666$。
- 我们在 20 000 个随机点上测试了全部四个不等式，以及恒等式 $\mathrm{g}' = \mathrm{f}\cos x$、$\mathrm{h}'(x) = \mathrm{g}(2x)$ 和 $\mathrm{F}'/\mathrm{F} = -\mathrm{h}/(3x\sin x\cos x)$。

常见错误

- 只论证 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$，或忘记指出 $\mathrm{f}(0) = 0$。两项事实都不可缺少：起点为零，以及导数严格为正。
- 在第 (iii) 部分使用第 (ii) 部分的结果，却没有检查 $2x$ 是否落在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 之内。$x < \frac{1}{4}\pi$ 这个限制正是由此而来。
- 由 $\mathrm{F}'/\mathrm{F} < 0$ 推出 $\mathrm{F}' < 0$，却没有指出 $\mathrm{F} > 0$。

STEP 之外

“起点为零而导数为正，则函数为正”这个原理是中值定理的推论，而中值定理是大学分析（analysis）课程中最早遇到的重要定理之一。像本题这样反复运用这个原理，是证明 $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$ 这类不等式的标准方法，而且它与带余项的泰勒定理（Taylor's theorem）关系密切。Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教科书）对中值定理及其应用有仔细的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。