详细解答

STEP II 1998，第 6 题

纯数学 · 摆线与法线

> **STEP II 1998，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q6

关键思路

两条曲线都是摆线（cycloid），即滚动的圆的圆周上一点所描出的路径。只要用上半角公式（half-angle formulae）$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$、$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ 和 $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$，有关它们的一切都会变得简单。斜率（gradient）会化简成 $\frac{\theta}{2}$ 的单一个正切或余切，而法线（normal）的方程亦会缩成简洁的一行。要证明一条直线是曲线 (2) 的切线（tangent），只需在 (2) 上找出一点，使该点在直线上，而且曲线在该点的斜率等于直线的斜率。

（题目中第二条曲线本应写 y_2 的地方写成了 y_1；这是印刷错误。）

解答

斜率

对于曲线 (1)，$\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\theta} = 1+\cos\theta$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1} = \frac{-\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = -\tan\frac{\theta}{2},$$

此式在 $\cos\frac{\theta}{2} \neq 0$ 时成立，即 $\theta \neq \pi$。

对于曲线 (2)，$\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\theta} = 1-\cos\theta$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}\theta} = \sin\theta$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x_2} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2},$$

此式在 $\theta \neq 0, 2\pi$ 时成立。

当 $\theta = \pi/2$ 时，$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$：曲线 (1) 的斜率为 -1，曲线 (2) 的斜率为 1。

当 $\theta = 3\pi/2$ 时，$\frac{\theta}{2} = \frac{3\pi}{4}$，此时 $\tan = -1$ 且 $\cot = -1$：曲线 (1) 的斜率为 1，曲线 (2) 的斜率为 -1。

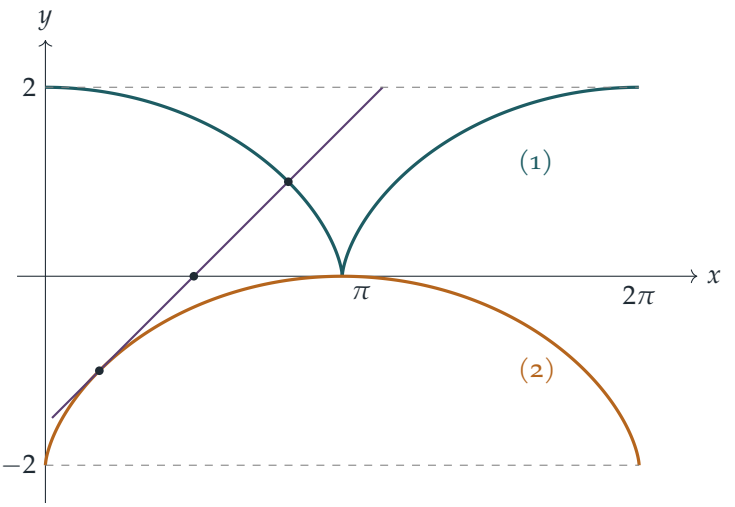
略图

x_1 和 x_2 都是 θ 的非递减函数（它们的导数 $1 \pm \cos\theta$ 永不为负），所以每条曲线都由左至右，从 $x = 0$ 延伸到 $x = 2\pi$。

曲线 (1) 由 $(0, 2)$ 出发，起点处斜率为 0，下降至 $(\pi, 0)$，然后对称地上升至 $(2\pi, 2)$。当 $\theta = \pi$ 时，两个导数同时为零，而 $|\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}x_1| = |\tan\frac{\theta}{2}| \to \infty$，所以在 $(\pi, 0)$ 有一个尖点（cusp），该处的切线是铅垂的。由于 $0 \le y_1 \le 2$，曲线位于 $y = 0$ 与 $y = 2$ 之间。

曲线 (2) 在 $(0, -2)$ 有一个尖点（切线铅垂，因为 $\cot\frac{\theta}{2} \to \infty$），上升至 $(\pi, 0)$，该处的斜率为 $\cot\frac{\pi}{2} = 0$，然后下降至尖点 $(2\pi, -2)$。它是一个立于直线 $y = -2$ 上的普通摆线拱。

两条曲线在 $(\pi, 0)$ 相接：曲线 (1) 铅垂地到达该点，曲线 (2) 则水平地越过该点。整幅图关于 $x = \pi$ 对称，因为 $\theta \mapsto 2\pi - \theta$ 会令 $x \mapsto 2\pi - x$，而两条曲线上的 y 都保持不变。图中紫红色的直线是 (1) 在 $\theta = \pi/2$ 处的法线，下文会再提到它。



曲线 (1) 的法线

(1) 的切线斜率为 $-\tan\frac{\theta}{2}$，所以法线的斜率为 $\cot\frac{\theta}{2}$（其中 $\theta \neq 0, \pi, 2\pi$；这些情况留待下文处理）。在点 $(\theta + \sin\theta,\ 1 + \cos\theta)$ 处的法线为

$$y - (1 + \cos\theta) = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}(x - \theta - \sin\theta).$$

全式乘以 $\sin\frac{\theta}{2}$，并使用半角形式：

$$y\sin\tfrac{\theta}{2} - 2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2} = (x - \theta)\cos\tfrac{\theta}{2} - 2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}.$$

两边最后一项相等，可以互相抵消，剩下

$$\boxed{y\sin\tfrac{\theta}{2} = (x-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2}}$$

这就是法线的方程。

这个形式同时涵盖了那些例外的值。当 $\theta = 0$ 时，它变成 $x = 0$，即通过 $(0,2)$ 的铅垂线；这是正确的，因为该处的切线是水平的。当 $\theta = 2\pi$ 时，同理可得 $x = 2\pi$。当 $\theta = \pi$ 时，它变成 $y = 0$，即通过尖点的水平线，与尖点处的铅垂切线互相垂直。

留意法线必定通过 x 轴上的点 $(\theta, 0)$。这正是滚动的圆与它所滚过的直线相切的那一点，是摆线的一个经典性质。

法线是曲线 (2) 的切线

? **想一想** 法线应该与曲线 (2) 相切于哪一点?

(2) 在参数（parameter）为 ϕ 处的切线斜率为 $\cot\frac{\phi}{2}$，而法线的斜率为 $\cot\frac{\theta}{2}$。对于 ϕ, θ 在 $(0, 2\pi)$ 内的情况，两者只在 $\phi = \theta$ 时相等，因为 cot 在 $(0, \pi)$ 上是一对一（one-to-one）的。所以唯一的候选点就是 (2) 上参数同为 θ 的那一点。

该点是 $(x_2, y_2) = (\theta - \sin\theta,\ -(1+\cos\theta))$。代入法线的方程：

$$\begin{aligned}
\text{左方} &= y_2\sin\tfrac{\theta}{2} = -2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\,\sin\tfrac{\theta}{2},\\
\text{右方} &= (x_2-\theta)\cos\tfrac{\theta}{2} = -\sin\theta\cos\tfrac{\theta}{2} = -2\sin\tfrac{\theta}{2}\cos^2\tfrac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

两者相等，所以 (1) 在 θ 处的法线通过 (2) 上参数为 θ 的点。在该点，(2) 的斜率为 $\cot\frac{\theta}{2}$，与法线的斜率相同。一条直线若通过曲线上某一点，而且斜率等于曲线在该点的斜率，它就是曲线在该点的切线，所以 (1) 的法线是 (2) 的切线，证明完毕。

特殊值的情况同样成立。当 $\theta = \pi$ 时，法线 $y = 0$ 与 (2) 相切于其顶点 $(\pi, 0)$，该处 (2) 的斜率为 0。当 $\theta = 0$（或 2π）时，法线 $x = 0$（或 $x = 2\pi$）就是 (2) 在尖点处的铅垂切线。

验算

- 当 $\theta = \pi/2$ 时，法线为 $y = x - \frac{\pi}{2}$。它通过 (1) 上的 $(\frac{\pi}{2}+1, 1)$，通过 $(\frac{\pi}{2}, 0)$，亦通过 (2) 上的 $(\frac{\pi}{2}-1, -1)$，而 (2) 在该点的斜率为 1，与第一部分的结果一致。这就是略图中紫红色的直线。
- 以有限差分（finite differences）对斜率作数值验算，结果与 $-1, 1$ 及 $1, -1$ 吻合至小数点后六位。在 1000 个随机选取的 θ 值上，法线都通过两个点，并且与 (2) 的切线平行，误差在 10^{-12} 之内。

常见错误

- 把斜率保留为 $-\sin\theta/(1+\cos\theta)$ 的形式，然后在求法线时硬闯繁复的代数运算。用上半角形式，求法线只需两行计算。
- 只证明了法线与曲线 (2) 相交。相交并不足够：还须证明在交点处两者的斜率相同。

STEP 之外

一条曲线的各个曲率中心(centres of curvature)所描出的曲线,称为它的*渐屈线*(evolute),它同时也是该曲线所有法线的包络线（envelope）。这道题说明了摆线的渐屈线是一条完全相同的摆线，只是平移了半个拱。沿法线由 (1) 到它与 (2) 的切点的距离为 $4|\cos\frac{\theta}{2}|$，刚好等于 (2) 由该点到其顶点的弧长（arc length）。所以 (1) 可以看成是一条由 (2) 上逐渐解开的绳子的末端所描出的曲线。惠更斯（Huygens）利用这一点造出了一个周期与摆幅无关的摆。想了解曲率、渐屈线和渐伸线（involutes），可参阅 Pressley 的 *Elementary Differential Geometry*（初等微分几何）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。