详细解答

STEP II 1998，第 5 题

纯数学 · 复数的三角不等式

STEP II 1998，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s2-q5

关键思路

$|z_1 - z_2|$ 是阿根图（Argand diagram）上两点之间的距离，所以关于 $|z_1 + z_2|$ 的不等式，其实就是说三角形的任何一边都不会比另外两边之和更长。把这个结果推广到 n 项之后，最后一部分只需用每一项的模（modulus）来估计该项的大小，再认出一个等比级数（geometric series）：$|z|$ 太小的话，左边就小得永远达不到 1。

解答

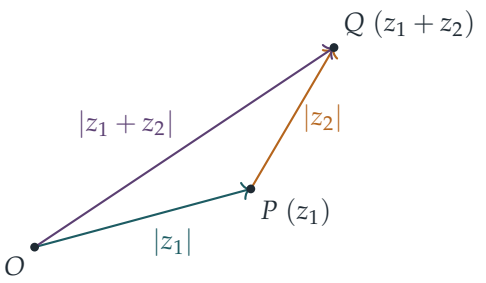
模、距离与三角不等式

若 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 为实数，则 z 的模为

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

即原点到代表 z 的点 (x, y) 的距离。若 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 及 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，则 $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$，这正是代表 z_1 和 z_2 的两点之间的距离。

现在设 O、P 和 Q 分别为代表 0、z_1 和 $z_1 + z_2$ 的点。



根据上述的几何解释，

$$OP = |z_1 - 0| = |z_1|, \qquad PQ = |(z_1 + z_2) - z_1| = |z_2|, \qquad OQ = |z_1 + z_2|.$$

直线段 OQ 是由 O 到 Q 的最短路径，所以它不会比路径 $O \to P \to Q$ 更长；即 $OQ \le OP + PQ$，而等号成立当且仅当 P 位于线段 OQ 上（包括各点重合的退化情况）。因此

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

这就是三角不等式（triangle inequality）。

n 项的不等式

我们用归纳法（induction）证明：对所有 $n \ge 1$ 及所有复数 $z_1, \ldots, z_n$，

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

当 $n = 1$ 时，两边都等于 $|z_1|$。假设结果对某个 $n = k \ge 1$ 成立。给定 $z_1, \ldots, z_{k+1}$，把两项的不等式应用于 $w = z_1 + \cdots + z_k$ 和 z_{k+1} 这两个复数：

$$\begin{aligned} |z_1 + \cdots + z_k + z_{k+1}| = |w + z_{k+1}| &\le |w| + |z_{k+1}| \\ &\le |z_1| + \cdots + |z_k| + |z_{k+1}|, \end{aligned}$$

其中最后一步用了归纳假设（inductive hypothesis）。所以结果对 $n = k + 1$ 成立，由归纳法可知它对所有 $n \ge 1$ 都成立。

最后一部分

假设 $|z| \le \frac{1}{4}$，并记 $r = |z|$，于是 $0 \le r \le \frac{1}{4}$。每一项都满足 $|a_k z^k| = |a_k|\,|z|^k \le 3r^k$，所以由 n 项的不等式可得

$$\begin{aligned} |a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n| &\le |a_1|\, r + |a_2|\, r^2 + \cdots + |a_n|\, r^n \\ &\le 3(r + r^2 + \cdots + r^n). \end{aligned}$$

> **想一想** 怎样把 $3(r + r^2 + \cdots + r^n)$ 化成可以与 1 比较的形式？又怎样确保不等式是严格（strict）的？

这是一个有限等比级数，而由于 $r \le \frac{1}{4} < 1$，我们可以使用求和公式：

$$3(r + r^2 + \cdots + r^n) = \frac{3r(1 - r^n)}{1 - r}.$$

若 $r = 0$，上式等于 0。若 $0 < r \le \frac{1}{4}$，则 $0 < 1 - r^n < 1$，所以

$$\frac{3r(1 - r^n)}{1 - r} < \frac{3r}{1 - r} \le \frac{3 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 1,$$

其中最后一步成立，是因为 $\dfrac{3r}{1-r}$ 在 $[0,1)$ 上随 r 递增（分子递增，而取正值的分母递减）。无论是哪一种情况，都有

$$|a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n| < 1,$$

所以左边不可能等于 1。因此方程没有满足 $|z| \le \frac{1}{4}$ 的解。

验算

- 这个界是最佳的：取每个 $a_k = 3$ 及 $z = \frac{1}{4}$，左边就是 $3\left(\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right) = 1 - 4^{-n}$，例如当 $n = 1, 2, 3$ 时分别为 0.75、0.9375、0.984375。它可以任意接近 1，却永远达不到，这正是严格不等式如此重要的原因。
- 在一次随机测试中，我们选取了 200 000 组数据，其中 $n \le 15$、a_k 满足 $|a_k| \le 3$、z 满足 $|z| \le \frac{1}{4}$，所得 $|a_1z + \cdots + a_nz^n|$ 的最大值约为 0.996，始终小于 1。

常见错误

- 单靠无穷级数之和 $3r/(1-r) \le 1$，只能得出 $|\text{左边}| \le 1$，这并不足以排除方程有解的可能。严格不等式要靠有限项之和（或者 $r > 0$ 时 $r^n > 0$ 这个事实）才能得到。
- 在归纳法中，两项的不等式必须应用于 $z_1 + \cdots + z_k$，并把它视为单一个复数；这正是该步骤的关键所在。

STEP 之外

三角不等式是度量（metric）的定义性质，而 $|z_1 - z_2|$ 令 $\mathbb{C}$ 成为一个度量空间（metric space）；分析学中几乎每一个关于收敛的论证都建基于它。最后一部分是一类定理的入门版本，这类定理用来确定多项式和幂级数（power series）的零点（zeros）位置：这里 $f(z) = a_1z + \cdots + a_nz^n - 1$ 在圆盘 $|z| \le \frac{1}{4}$ 内没有零点，与儒歇定理（Rouché's theorem）的精神一脉相承。想了解复数的几何，可读 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以图像阐释复分析）；想了解分析学中的度量概念，可读 Abbott 的 *Understanding Analysis*（实分析入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。