详细解答

STEP II 1998，第 4 题

纯数学 · 分部积分法

STEP II 1998，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s2-q4

关键思路

那个棘手的因子 $\operatorname{cosec}(x/2)$ 无法直接积分，但相邻两个被积函数（integrand）之*差*却好处理得多：正弦的差化积公式会产生一个因子 $\sin(x/2)$，刚好把余割完全约去。剩下的是多项式乘以余弦，用分部积分法（integration by parts）便可按标准做法处理。然后把这些差逐项相消（telescope），最终归结到一个可以直接手算的初始值。

解答

差 $I_n - I_{n-1}$

由于 $nx + x/2 = (n + \frac{1}{2})x$，两个被积函数之差为

$$\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)[\sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-\tfrac{1}{2})x]\operatorname{cosec}\tfrac{x}{2}.$$

根据和差化积公式（factor formula）$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$，取 $\frac{A+B}{2} = nx$ 及 $\frac{A-B}{2} = \frac{x}{2}$，得

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin(n-\tfrac{1}{2})x = 2\cos nx\,\sin\tfrac{x}{2}.$$

$\sin\frac{x}{2}$ 与余割互相约去，所以

$$I_n - I_{n-1} = 2\int_0^{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

想一想 在 $x = 0$ 处 $\operatorname{cosec}(x/2)$ 为无穷大，这样约去是否合理?

合理。每个原来的被积函数在 $x \to 0$ 时都有有限的极限,因为 $\sin(n+\frac{1}{2})x \big/ \sin\frac{x}{2} \to 2n+1$,

所以这些积分都是再普通不过的积分。当 $0 < x \le \pi$ 时，约去只是严格的代数运算，而只在 $x = 0$ 这一点改变被积函数的值，并不会改变积分的值。

现在用分部积分法，取 $u = \frac{\pi}{2} - x$ 及 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos nx$，于是 $v = \frac{1}{n}\sin nx$（因 $n \ge 1$，故成立）：

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\cos nx\,\mathrm{d}x &= \left[\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \frac{1}{n}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-\cos n\pi}{n^2} = \frac{1-(-1)^n}{n^2},\end{aligned}$$

其中边界项为零，因为 $\sin 0 = \sin n\pi = 0$。因此

$$I_n - I_{n-1} = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2} = \begin{cases}\dfrac{4}{n^2}, & n \text{ 为奇数},\\ 0, & n \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

求 I_n 的值

要逐项相消，我们需要一个初始值。这个积分同样可以用来定义 I_0：当 $n = 0$ 时，被积函数是 $(\frac{\pi}{2} - x)\sin\frac{x}{2}\operatorname{cosec}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} - x$，所以

$$I_0 = \int_0^{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{\pi}{2}x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = 0,$$

而上面的差公式对 $n = 1$ 也成立（推导过程只用到 $n \ge 1$）。把 $1, 2, \ldots, n$ 各项的差相加：

$$I_n = I_0 + \sum_{k=1}^{n}(I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\frac{2(1-(-1)^k)}{k^2}.$$

只有奇数的 k 才有贡献，每项为 $4/k^2$，所以

$$\boxed{I_n = 4\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ 为奇数}}}^{n}\frac{1}{k^2} = 4\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right),}$$

若 n 为奇数，最后一项是 $1/n^2$；若 n 为偶数，最后一项是 $1/(n-1)^2$。等价地，$I_n = 4\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{(2r-1)^2}$，其中 $m = \lceil n/2\rceil$。

如果你对使用 $n = 0$ 感到不安（题目说明 n 是正数），可以改由 I_1 开始。由于 $\sin\frac{3x}{2} = \sin\frac{x}{2}(1 + 2\cos x)$，利用上面 $n = 1$ 时的分部积分结果，可得 $I_1 = \int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2} - x)(1 + 2\cos x)\,\mathrm{d}x = 0 + 2\cdot 2 = 4$。这与公式吻合。

验算

- $I_1 = I_2 = 4$ 及 $I_3 = I_4 = 4 + \frac{4}{9} = \frac{40}{9} \approx 4.4444$。对原来的积分使用辛普森法则（Simpson's rule）（在 $x = 0$ 处取被积函数的极限 $\frac{\pi}{2}(2n+1)$），算得 I_3 为 $4.444444\ldots$，而且对每个 $n \le 12$，结果与上述和式的误差都在 10^{-8} 之内。

- 对应 n 的被积函数是 $\frac{\pi}{2} - x$ 乘以 $1 + 2\cos x + \cdots + 2\cos nx$，而 $\frac{\pi}{2} - x$ 关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 是奇函数。当 k 为偶数时（常数 1 亦然），$\cos kx$ 关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 是偶函数，所以乘积是奇函数，在 $[0, \pi]$ 上的积分为零。这就是 $I_0 = 0$ 以及偶数 k 没有任何贡献的原因。

常见错误

- 把正弦差化积公式中的正负号或因子 2 弄错；可代入一组数值检验，例如 $x = \pi, n = 1$。
- 把 $\cos n\pi = 1$ 写了出来，而没有写成 $(-1)^n$，结果令每一个差都变成零。
- 忘记初始值，或把答案写成对所有 k 求和，而没有留意到偶数项全部为零。

STEP 之外

函数 $\sin(n + \frac{1}{2})x \big/ \sin\frac{x}{2} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos kx$ 称为狄利克雷核（*Dirichlet kernel*），是证明傅里叶级数（Fourier series）收敛的核心工具。当 $n \to \infty$ 时，我们的和趋向 $4 \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2}$，这里用到 $\sum_{\text{奇数}k} 1/k^2 = \pi^2/8$，它是欧拉（Euler）的 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ 的近亲（数值上，$I_{200} \approx 4.925$，而 $\pi^2/2 \approx 4.935$）。关于傅里叶级数和这类和式，Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教材）有很好的讲解；至于收敛性背后的分析学，可参考 Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。