详细解答

STEP II 1998，第 3 题

纯数学 · 裂项相消级数

STEP II 1998，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s2-q3

关键思路

通项的分母若是几个连续因子的乘积，自然应该把它拆成部分分式（partial fractions）。拆开后的各项会在求和时互相抵消，即所谓裂项相消（telescoping），最后只剩下首尾两端的几项。在第二部分，题目给出比值 a_n/a_{n-1}，这表示 a_n/a_1 是一连串比值的乘积，而这个乘积同样可以逐项相消。运气好的话，a_n 会变回第一部分的级数（series），而事实正是如此。

解答

和 S_N

设

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

利用掩盖法（cover-up rule）：取 $n=0$，得 $A = \frac{-1}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2}$；取 $n=-1$，得 $B = \frac{-3}{(-1)(1)} = 3$；取 $n=-2$，得 $C = \frac{-5}{(-2)(-1)} = -\frac{5}{2}$。因此

$$\frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2n} + \frac{3}{n+1} - \frac{5}{2(n+2)}.$$

留意 $A+B+C=0$。正因如此，这个和才可以裂项相消。

设 $H_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}$。则

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = H_N - 1 + \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+2} = H_N - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}.$$

于是

$$\begin{aligned} S_N &= -\tfrac{1}{2}H_N + 3\left(H_N - 1 + \frac{1}{N+1}\right) - \tfrac{5}{2}\left(H_N - \tfrac{3}{2} + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2}\right) \\ &= \left(-\tfrac{1}{2} + 3 - \tfrac{5}{2}\right)H_N + \left(-3 + \tfrac{15}{4}\right) + \left(3 - \tfrac{5}{2}\right)\frac{1}{N+1} - \frac{5}{2(N+2)} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2(N+1)} - \frac{5}{2(N+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{N+1} - \frac{5}{N+2}\right), \end{aligned}$$

这正是所需的结果。由于 $A + B + C = 0$，H_N 的系数为零。

当 $N \to \infty$ 时，$\frac{1}{N+1}$ 和 $\frac{5}{N+2}$ 都趋向 0，所以

$$S_N \to \frac{3}{4}.$$

数列 a_n

对于 $n \geq 2$，把题目给出的比值逐个相乘：

$$\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+2} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k-3}.$$

想一想 这两个乘积可以怎样化简？

把它们逐项写出来。第二个乘积可以直接相消，因为每一项的分子都与下一项的分母约去：

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{2k-3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n-3} = 2n - 1.$$

在第一个乘积中，分子依次为 $1, 2, \ldots, n-1$，分母依次为 $4, 5, \ldots, n+2$。由 4 至 $n-1$ 的所有因子全部约去，所以

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+2} = \frac{(n-1)!}{(n+2)!/3!} = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}.$$

这个阶乘（factorial）形式对所有 $n \geq 2$ 都成立，即使 $n < 5$、根本没有因子可约时亦然。因此

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{6(2n-1)}{n(n+1)(n+2)}.$$

当 $n = 1$ 时，右边等于 $\frac{6}{6} = 1$，所以这条公式对所有 $n \geq 1$ 都成立。作为验算，取 $n = 2$ 得 $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$，与题目给出的比值 $\frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 1}$ 吻合。

当 $a_1 = \frac{2}{9}$ 时，

$$a_n = \frac{2}{9} \cdot \frac{6(2n-1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}.$$

所以 a_n 是第一个级数第 n 项的 $\frac{4}{3}$ 倍。它的部分和（partial sums）为 $\frac{4}{3}S_N \to \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

验算

- $N=1$：公式给出 $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)=\frac{1}{6}$，正是首项 $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}$。$N=2$ 给出 $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{4}\right)=\frac{7}{24}=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$。两者皆正确。
- 数值上，首 1999 项之和为 $0.74900\ldots$，从下方趋近 $\frac{3}{4}$，与公式的预测一致（$S_N\approx\frac{3}{4}-\frac{2}{N}$）。
- 取 $a_1=\frac{2}{9}$，由递推关系（recurrence）逐项算出 a_n，首 299 项之和为 $0.9911\ldots$。余下的尾项之和约为 $\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{300}\approx0.009$，与总和为 1 相符。

常见错误

- 处理裂项相消的首尾两端时出错。像上面那样用 H_N 来表示，就能把各项算得清清楚楚。
- 阶乘乘积错了一位。约分之前，先把开头和结尾的几个因子写出来。
- 忘记检查 a_n/a_1 的公式在 $n=1$ 时是否也成立，此时乘积是空的。

STEP 之外

裂项相消是微积分基本定理（fundamental theorem of calculus）的离散版本：$\sum(f(n+1)-f(n))=f(N+1)-f(1)$，正如 $\int f'=f(b)-f(a)$。第二部分的数列是一个*超几何*（hypergeometric）数列，即相邻两项之比是 n 的有理函数（rational function）。Gosper 算法（Gosper's algorithm）能够准确判定这类和何时具有闭合形式（closed form），电脑代数系统正是用这个方法来求级数之和。至于部分和极限的分析，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。