详细解答

STEP II 1998，第 2 题

纯数学 · 二项式级数近似

STEP II 1998，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s2-q2

关键思路

二项式级数（binomial series）在变量很小时收敛（converge）得很快，所以我们希望把 $\sqrt{2}$（或 $\sqrt[3]{2}$）写成一个简单的有理数乘以 $(1+x)^a$，而其中的 x 极小。就平方根而言，$49/50$ 与 1 只差一点，而且含有因数 2；就立方根而言，我们要找一个几乎等于 $2\times$ 另一个立方数的立方数，而 $128 = 2\times 4^3$ 正好紧贴着 $125 = 5^3$。

解答

2 的平方根

首先，我们把题目给出的式子与 $\sqrt{2}$ 联系起来。由于 $1-\frac{1}{50} = \frac{49}{50}$，

$$\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2} = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{2} = \frac{10}{7}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{1/2}.$$

$(1+x)^{1/2}$ 的二项式级数的首几项为

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \cdots,$$

对 $|x|<1$ 成立。设 $x = -\frac{2}{100} = -2y$，其中 $y = \frac{1}{100}$。2 的幂刚好可以约去：

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2}{100}\right)^{1/2} &\approx 1 - \tfrac{1}{2}(2y) - \tfrac{1}{8}(2y)^2 - \tfrac{1}{16}(2y)^3 \\ &= 1 - y - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}y^3 \\ &= 1 - 0.01 - 0.00005 - 0.0000005 \\ &= 0.9899495.\end{aligned}$$

这就是把 $1/50$ 写成 $2/100$ 的好处：每一项都变成 10 的幂乘以 1 或 $\frac{1}{2}$，所以运算全是精确的小数。

因此

$$\sqrt{2} \approx \frac{10 \times 0.9899495}{7} = \frac{9.899495}{7} = 1.41421357\ldots,$$

准确至小数点后六位，$\sqrt{2} \approx 1.414214$，正如题目所求。

2 的立方根

> **想一想** 应取哪个 N 和 a？怎样才能令 $(1+N/125)^a$ 与 $\sqrt[3]{2}$ 扯上关系？

由于 $125 = 5^3$，$(125+N)/125$ 的立方根就是 $\sqrt[3]{125+N}/5$。因此我们希望 $125+N$ 是某个完全立方数（perfect cube）的 2 倍，而且 N 要小。从 2×1^3, 2×2^3, 2×3^3, $2\times 4^3 = 2, 16, 54, 128$ 可见，128 与 125 只相差 3。所以取 $N=3$ 和 $a=\frac{1}{3}$：

$$\left(1+\frac{3}{125}\right)^{1/3} = \frac{\sqrt[3]{128}}{5} = \frac{4\sqrt[3]{2}}{5}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\left(1+\frac{3}{125}\right)^{1/3}.$$

$(1+x)^{1/3}$ 的二项式级数的首几项为

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \tfrac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}x^3 + \cdots = 1 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{9}x^2 + \tfrac{5}{81}x^3 - \cdots.$$

和之前一样，作一个代换（substitution）便可令运算变得简洁。设 $x = 3y$，其中 $y = \frac{1}{125} = 0.008$；于是 $\frac{1}{3}x = y$、$\frac{1}{9}x^2 = y^2$ 及 $\frac{5}{81}x^3 = \frac{5}{3}y^3$。所以

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{3}{125}\right)^{1/3} &\approx 1 + y - y^2 + \tfrac{5}{3}y^3 \\ &= 1 + 0.008 - 0.000064 + \tfrac{5}{3}(0.000000512) \\ &= 1.007936 + 0.00000085333\ldots \\ &= 1.00793685333\ldots.\end{aligned}$$

乘以 $\frac{5}{4}$，得

$$\sqrt[3]{2} \approx 1.25 \times 1.00793685333\ldots = 1.25992106\ldots,$$

所以准确至小数点后六位，$\sqrt[3]{2} \approx 1.259921$。

验算

计算机给出 $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$ 和 $\sqrt[3]{2} = 1.25992105\ldots$，所以两个近似值都准确至小数点后六位；我们求得的值是 1.41421357 和 1.25992107。我们已用电脑以精确分数核对过这两个级数。从第一个被略去的项可以大致看出误差的大小：$-\frac{5}{128}x^4$ 对 $\sqrt{2}$ 的估值贡献约 -9×10^{-9}，而 $-\frac{10}{243}x^4$ 对 $\sqrt[3]{2}$ 的估值贡献约 -1.7×10^{-8}。两者都远小于足以改变小数点后第六位的 5×10^{-7}。

常见错误

- 忘记还原缩放的倍数：级数给出的是 $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ 和 $\frac{4\sqrt[3]{2}}{5}$，而不是 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt[3]{2}$ 本身。
- 级数中的正负号出错。在第一部分中 x 是负数，所以 1 之后的四项全是负的。在第二部分中，正负号则交替出现。
- 太早舍入。在最后一步除法或乘法之前，应至少保留八位小数。

STEP 之外

这道题的背后是带余项的泰勒定理（Taylor's theorem），它把“下一项极小”这个说法变成对误差的严格界限。它解释了为何一个公比约为 0.02 的级数，每多取一项便大约多得一位半至两位小数的准确度。同一个技巧，即找一个有理数 p/q 使 p^n/q^n 接近目标数的某个简单倍数，与数论中的连分数（continued fractions）和有理逼近（rational approximation）息息相关。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（数论入门名著）是阅读这些课题的好去处，而 Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门教材）则仔细讲解了泰勒余项。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。