详细解答

STEP II 1998，第 13 题

概率与统计 · 指数分布

STEP II 1998，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s2-q13

关键思路

第一个结果是指数分布（exponential distribution）的无记忆性（memoryless property）：如果一次服务已经持续了时间 t，余下所需的时间与一次全新服务的时间有相同的分布。有了这个结果，店铺这个情境几乎不用再作任何计算。就概率而言，服务到一半的顾客与刚刚开始接受服务的顾客并无分别。因此，在每一个关键时刻，仍在接受服务的人之间的竞赛，都是相同而且独立（independent）的指数时间之间的竞赛。

解答

无记忆性

对于 $x \geq 0$，

$$\mathrm{P}(X > x) = \int_x^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda u}\Big]_x^\infty = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

取 $s, t \geq 0$。事件 $\{X > s+t\}$ 包含于 $\{X > t\}$ 之内，所以两者的交集就是 $\{X > s+t\}$。根据条件概率（conditional probability）的定义，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X > s+t \mid X > t) &= \frac{\mathrm{P}(X > s+t \text{ 及 } X > t)}{\mathrm{P}(X > t)} = \frac{\mathrm{P}(X > s+t)}{\mathrm{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda s} = \mathrm{P}(X > s),\end{aligned}$$

这就是所要求的结果。（我们可以作除法，是因为 $\mathrm{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} > 0$。）

两位顾客都仍在接受服务

模型：两个服务时间互相独立，而且各自服从题目所给的指数分布。设 A 和 B 为我到达时正在接受服务的两位顾客。

> **想一想** 顾客 A 已经接受了一段长度未知的服务。这难道不会改变他还需要多少时间的分布吗?

不会，而这正是第一部分告诉我们的。假设 A 的服务至今已持续了 u。那么它最少再持续 t 的概率是

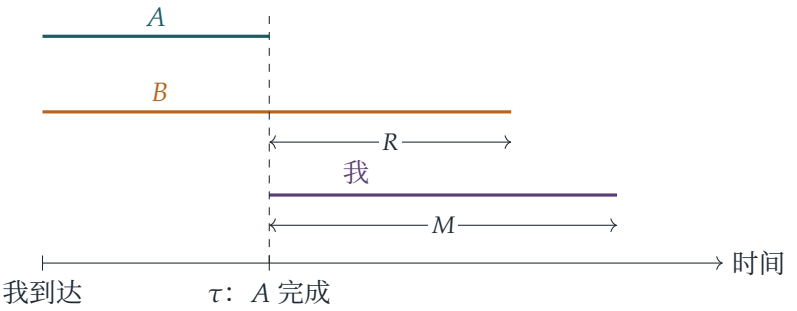
$$\mathrm{P}(X > u + t \mid X > u) = \mathrm{P}(X > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

不论 u 是多少。所以，由我走进店舖的一刻起计，A 的剩余服务时间服从同一个参数（parameter）为 λ 的指数分布，B 的情况亦然。由于完整的服务时间互相独立，这两个剩余时间也互相独立。因此

$$\mathrm{P}(\text{两人均仍在接受服务，于时刻}t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-2\lambda t}.$$

另一位顾客完成时，我是否仍在接受服务?

假设 A 先完成，时刻为我到达后的 τ，而我随即到 A 的店员那里接受服务。



在时刻 τ，设 R 为 B 仍需要的时间，并设 M 为我的服务时间。

- M 服从参数为 λ 的指数分布，因为我的服务在 τ 才重新开始。它与之前发生的一切独立，因为不同顾客的服务时间互相独立。
- R 同样服从参数为 λ 的指数分布。在时刻 τ，B 已经接受了一段时间的服务（我到达之前的时间再加上 τ），而再次根据无记忆性，剩余时间服从原来的分布。它与 M 独立。

B 完成时我仍在接受服务，当且仅当 $M > R$。现在 M 和 R 互相独立，并且有相同的连续分布 (continuous distribution)，所以根据对称性 (symmetry)，$\mathrm{P}(M > R) = \mathrm{P}(R > M)$。

此外，对于连续随机变量（continuous random variables），$\mathrm{P}(M = R) = 0$，所以这两个概率之和为 1。因此

$$\mathrm{P}(\text{另一位顾客完成时我仍在接受服务}) = \tfrac{1}{2}.$$

如果你宁愿用计算而不用对称性的论证，可以以 R 为条件：

$$\mathrm{P}(M > R) = \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda r}\,\mathrm{P}(M > r)\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty \lambda \mathrm{e}^{-2\lambda r}\,\mathrm{d}r = \tfrac{1}{2}.$$

验算

- 当 $t = 0$ 时，$\mathrm{e}^{-2\lambda t} = 1$：我到达时，两位顾客必定都正在接受服务。当 $t \to \infty$ 时，概率趋向 0，这也是应有的结果。
- 答案 $\frac{1}{2}$ 与 λ 无关，这正如我们所料，因为改变 λ 只是改变了时间的单位。
- 以 $\lambda = 0.7$ 和 $t = 0.9$ 进行模拟，得出两位顾客都仍在接受服务的比例为 0.2831，而 $\mathrm{e}^{-1.26} \approx 0.2837$。在另一个模拟中，两位顾客已经各自接受了随机长度的服务，结果我在 0.5000 比例的试验中仍在接受服务。

常见错误

- 以为正在接受服务的顾客“快要完成”，所以他们的剩余时间会较短。对指数分布而言，已经发生的事情不会造成任何分别。
- 把 $\mathrm{P}(X > s + t \text{ 及 } X > t)$ 写成 $\mathrm{P}(X > s + t)\,\mathrm{P}(X > t)$。这两个事件并不独立；其中一个包含另一个。

STEP 之外

指数分布是唯一具有无记忆性的连续分布。这个事实是泊松过程（Poisson process）和排队论（queueing theory）的基础；在排队论中，一间有 c 位店员、服务时间服从指数分布的店舖，就是经典的 M/M/c 队列。两位顾客的计算可以推广至 n 位：n 个参数为 λ 的独立指数变量之中的最小值，服从参数为 $n\lambda$ 的指数分布（把尾概率相乘即可），而根据对称性，每个变量成为最小者的可能性均等。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入门）以这个程度讲解指数变量和泊松过程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。