详细解答

STEP II 1998，第 12 题

概率与统计 · 贝叶斯定理

STEP II 1998，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s2-q12

本题在 *Beyond STEP* 第 12.2 节基本比率谬误中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/base-rate.html

关键思路

这一题是贝叶斯定理（Bayes' theorem）的两次应用。第一部分是经典的“罕见疾病”意外：当疾病很罕见时，即使检测相当准确，大部分阳性结果仍可能是假阳性（false positive）。至于第二部分，窍门在于看出接受 STEP 检测的人并不是整体人口的随机样本。他们是 AL 阳性的那一群人，所以第一部分的答案就成为第二次检测的先验概率（prior）。

解答

设 D 为某人患有 mathematitis 的事件，A 为 AL 检测呈阳性的事件，B 为 STEP 检测呈阳性的事件。已知

$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{100}, \qquad \mathrm{P}(A \mid D) = \tfrac{9}{10}, \qquad \mathrm{P}(A \mid D') = \tfrac{1}{11}.$$

Frankie 的概率

根据全概率公式（law of total probability），

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \mid D)\,\mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(A \mid D')\,\mathrm{P}(D') \\ &= \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{11}\cdot\frac{99}{100} = \frac{9}{1000} + \frac{9}{100} = \frac{99}{1000}.\end{aligned}$$

再根据贝叶斯定理，

$$\mathrm{P}(D \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \mid D)\,\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{9/1000}{99/1000} = \frac{1}{11}.$$

所以即使 AL 检测结果呈阳性，Frankie 是患者的概率也只有 $\frac{1}{11}$。在 1000 人当中，约有 9 名患者检测呈阳性，但 990 名非患者中也约有 90 人呈阳性，假阳性的数目远远盖过了真阳性。

求 p

现在只考虑 AL 检测呈阳性的人。在这一群人之中，

$$\mathrm{P}(D \mid A) = \tfrac{1}{11}, \qquad \mathrm{P}(D' \mid A) = \tfrac{10}{11}.$$

我们把题目所给有关 STEP 的资料理解为 $\mathrm{P}(B \mid D \cap A) = 0.9$ 和 $\mathrm{P}(B \mid D' \cap A) = p$：STEP 检测的表现只取决于该人是否患者，而与 AL 的结果无关。

> **想一想** 为甚么我们不从 $\mathrm{P}(D) = \frac{1}{100}$ 重新开始?

因为只有 AL 呈阳性的人才会接受 STEP 检测，而在这一群人之中，患者所占的比例已不再是 1%，而是 $\frac{1}{11}$，这正是第一部分求得的结果。第一次检测的后验概率（posterior）成为第二次检测的先验概率。

在 AL 阳性的一群人之中，

$$\mathrm{P}(D \cap B \mid A) = \frac{1}{11} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{110},$$
$$\mathrm{P}(D' \cap B \mid A) = \frac{10}{11} \cdot p = \frac{10p}{11}.$$

题目告诉我们，两项检测皆呈阳性的人当中有一半是患者，即 $\mathrm{P}(D \mid A \cap B) = \frac{1}{2}$。这表示上面两个概率相等：

$$\frac{9}{110} = \frac{10p}{11} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{9}{100} = 0.09.$$

验算

- 赔率形式（odds form）：患病的先验赔率为 $1 : 99$。AL 把它乘以 $\frac{0.9}{1/11} = 9.9$，得 $9.9 : 99 = 1 : 10$，与 $\frac{1}{11}$ 吻合。要使赔率达到 $1 : 1$，STEP 必须把它乘以 10，所以 $\frac{0.9}{p} = 10$，即 $p = 0.09$。
- 模拟二百万人先后接受两项检测（取 $p = 0.09$），结果 AL 阳性者当中患者所占的比例为 0.0909，而两项检测皆呈阳性者当中患者所占的比例为 0.5003。

常见错误

- 以 $\mathrm{P}(D) = 0.01$ 作为 STEP 检测的先验概率，这样会得出 $p = 0.0009$，比正确答案小了一百倍。
- 把 $\mathrm{P}(A \mid D) = 0.9$ 与 $\mathrm{P}(D \mid A)$ 混淆。第一部分的重点正正在于这两者相差甚远。

STEP 之外

把贝叶斯定理写成赔率形式，即后验赔率等于先验赔率乘以似然比（likelihood ratio），连续检测的计算就变得近乎机械化：每一项独立的证据只不过是把赔率乘以它自己的因子。这是贝叶斯推论（Bayesian inference）的基础，也是现实中设计医学筛查计划的依据。我们所作的假设，即在给定患病状况下各项检测条件独立（conditionally independent），与“朴素贝叶斯”（naive Bayes）分类器背后的假设相同。Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论入门教科书）对条件概率和贝叶斯法则有极佳的讲解，并附有许多与本题类似的例子。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。