详细解答

STEP II 1998，第 11 题

力学 · 抛体运动

STEP II 1998，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s2-q11

本题在 *Beyond STEP* 第 11.11 节外野手如何接球中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/fielders.html

关键思路

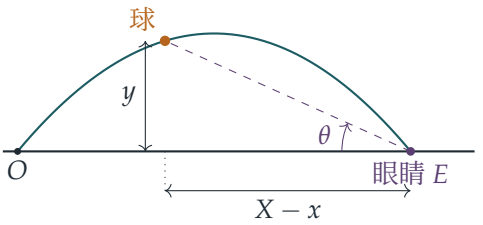
把原点设在击球点，并取其高度为眼睛的高度，然后把 $\tan\theta$ 写成“球的高度除以球与外野手眼睛之间的水平距离”。一个由眼睛高度出发、最后又回到眼睛高度的抛体（projectile），其高度可以因式分解为 $\frac{1}{2}gt(T-t)$，其中 T 是飞行时间（time of flight）；而如果外野手最后身处正确的位置，水平距离同样是 $T-t$ 的倍数。因子 $T-t$ 互相约去，余下的 $\tan\theta$ 便与 t 成正比。

解答

我们把球视为只受重力作用（没有空气阻力（air resistance））的质点（particle），并把外野手的眼睛视为一个与击球点等高的点。取 x 轴为水平方向，由击球点 O 指向外野手，y 轴铅垂向上。设球的初速度的水平分量为 $U>0$，铅垂分量为 $W>0$。那么在时刻 t

$$x=Ut, \qquad y=Wt-\tfrac{1}{2}gt^2=\tfrac{1}{2}gt\,(T-t), \qquad \text{其中} T=\frac{2W}{g}$$

是球回到眼睛高度的时刻。



如果外野手的眼睛位于水平位置 X（球在飞行期间有 $X > x$），视线（line of sight）便与水平线成仰角 θ，其中

$$\tan\theta = \frac{y}{X-x}.$$

站立不动的外野手

“位置恰到好处”的意思是球刚好飞到她的眼睛：她的眼睛位于球回到眼睛高度的那一点，即 $X = UT$。于是当 $0 < t < T$ 时

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{UT-Ut} = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{U(T-t)} = \frac{g}{2U}t,$$

这里约去了 $T-t$，因为球在飞行期间它不等于零。因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = \frac{g}{2U},$$

这是一个常数，正是所求。（在接球前的一刻，$\tan\theta \to gT/(2U) = W/U$：她看见球飞来的角度，恰好就是球被击出时的角度，这与抛物线的对称性吻合。）

奔跑中的外野手

现在设下一球的速度分量为 U、W（所以同样有 $y = \frac{1}{2}gt(T-t)$，其中 $T = 2W/g$），并设外野手在球被击出的一刻与 O 相距 D，然后以恒速 v 跑向击球手。她的眼睛位于 $X = D - vt$，所以

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{D-(U+v)t}. \qquad (*)$$

她能接到球，当且仅当在时刻 T 她的眼睛正好位于球回到眼睛高度的那一点，即

$$D - vT = UT \quad\Longleftrightarrow\quad D = (U+v)T.$$

我们要证明，这种情况发生当且仅当 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$ 为常数，因此“选择 v 使 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$ 保持不变”确是正确的法则。

如果她选对了速率，则 $D = (U+v)T$，而 $(*)$ 变成

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}gt(T-t)}{(U+v)(T-t)} = \frac{g}{2(U+v)}t, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta) = \frac{g}{2(U+v)},$$

这是一个常数，与第一部分完全一样，只是 U 换成了球相对于她的速率 $U+v$。

想一想 这不是只完成了一半吗？会不会有另一个 v 同样令变化率保持不变？

不会。假设在整个飞行过程中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)=k$ 为常数。在 $t=0$ 时球位于眼睛高度，所以 $\tan\theta=0$，因而 $\tan\theta=kt$。把这个结果代入 $(*)$ 并除以 t（其中 $0<t<T$），得

$$\tfrac{1}{2}g\,(T-t)=k\big(D-(U+v)t\big)\quad \text{对所有}t\in(0,T).$$

两个关于 t 的线性函数如果在一个区间上相等，它们的系数必定相同，所以

$$\tfrac{1}{2}g=k(U+v)\qquad \text{及}\qquad \tfrac{1}{2}gT=kD.$$

由第一式可知 $k\neq 0$；把第二式除以第一式便得 $D=(U+v)T$，这正是接到球的条件。

所以，能把她带到球那里的速率 $v=D/T-U$，恰好就是令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan\theta)$ 保持不变的那个速率。实际上，球还在空中时她无法计算 $D/T-U$，但她可以观察：如果球在她眼中上升得愈来愈快，她便站得太后，应该跑快一点；如果球看来上升得愈来愈慢，她便应该放慢脚步。（由于她是朝着击球手跑的，球的落点比她的起始位置近，即 $D>UT$，所以 $v>0$。）

验算

- 在第二部分取 $v=0$，便回到第一部分的结果：$D=UT$，变化率为 $g/(2U)$。
- 单位：g/U 的单位是 $\mathrm{m\,s^{-2}}/\mathrm{m\,s^{-1}}=\mathrm{s^{-1}}$，正好是一个纯数的变化率应有的单位。
- 一个数值例子：球以 $20\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ 的速率、45° 的仰角被击出，取 $g=9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$，则 $T\approx 2.886\ \mathrm{s}$，射程为 $40.82\ \mathrm{m}$；站在该处的外野手会看见 $\tan\theta$ 以 $g/(2U)\approx 0.346\ \mathrm{s^{-1}}$ 的速率增长。如果她改为从 $49.47\ \mathrm{m}$ 外起步，并以 $3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ 的速率奔跑，变化率则为 $0.286\ \mathrm{s^{-1}}$。在多个时刻对 $(*)$ 作数值求导，可确认这两个变化率都是常数，而选错了 v 则会得到一个不断改变的变化率。

常见错误

- 从击球手而不是从外野手的眼睛量度 θ：$\tan\theta$ 中的水平距离是 $X-x$，而不是 x。
- 只证明了正确的 v 会给出恒定的变化率，却没有证明恒定的变化率必然导致正确的 v；正是这个逆命题（converse）才令这条法则真正可用。

STEP 之外

这就是接球心理学中的“光学加速度抵消”（optical acceleration cancellation）概念：外野手似乎是这样跑的——让球的影像以稳定的速率上升，而从不需要预测球会落在哪里。这是反馈控制律（feedback control law）的一个例子：把一个观察到的量保持不变，而不是去计算轨迹。关于抛体运动、相对速度（relative velocity）以及这种思考方式的入门，可参阅 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。