详细解答

STEP II 1998，第 10 题

力学 • 移动楔上的质点

> **STEP II 1998，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s2-q10

关键思路

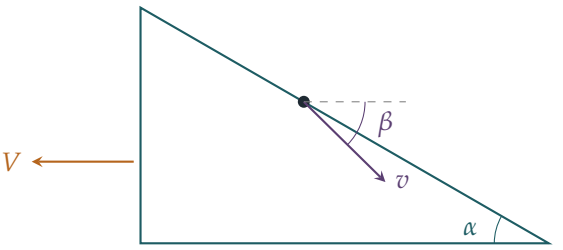
整道题由两个事实推动。由于质点（particle）一直留在斜面上，它相对于楔块（*wedge*）的速度必定沿着斜面的方向。另外，由于系统以外没有任何力在水平方向推动它，而且除重力外没有其他力做功，所以水平动量（momentum）和能量都守恒。(i)–(iii) 每一部分，都是把其中一个事实写成方程。之后第 (ii) 部分说明 β 始终不变，于是最后一部分就变成匀加速运动。

解答

模型。质点视为质点；楔块是只滑动而不转动的刚体（rigid body）；斜面和地面都是光滑的；质点一直与斜面保持接触。取斜面向右下方倾斜，于是质点向右下方运动，而楔块被推向左方，如图所示。

取水平分量向右为正、垂直分量向上为正，

$$\text{质点的速度} = (v\cos\beta,\ -v\sin\beta), \qquad \text{楔块的速度} = (-V,\ 0).$$



第 (i) 部分

质点相对于楔块的速度是

$$(v\cos\beta,\ -v\sin\beta) - (-V,\ 0) = (v\cos\beta + V,\ -v\sin\beta).$$

质点在斜面上时，这个相对速度（relative velocity）沿着斜面，方向在水平线以下 α 角（指向右下方）。所以

$$\frac{v\sin\beta}{v\cos\beta + V} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

交叉相乘，

$$\begin{aligned} & v\sin\beta\cos\alpha = v\cos\beta\sin\alpha + V\sin\alpha \\ \Longrightarrow\quad & V\sin\alpha = v(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha) = v\sin(\beta-\alpha), \end{aligned}$$

这正是所要证明的结果。这纯粹是运动学（kinematics）：不需要任何力学原理，只需要“质点不离开斜面”这个事实。

第 (ii) 部分

原理：水平方向的线动量守恒（conservation of linear momentum）。把质点和楔块视为一个系统。作用在系统上的外力是两者的重量和地面的法向反作用力（normal reaction），由于地面光滑，这些力全都是垂直的。（质点与斜面之间的反作用力是内力。）所以水平总动量是常数，而由于一切都从静止开始，它起初是零：

$$mv\cos\beta - MV = 0, \qquad \text{所以} \qquad V = \frac{m}{M}\,v\cos\beta.$$

代入 (i)，并展开 $\sin(\beta-\alpha)$，

$$\frac{m}{M}\,v\cos\beta\sin\alpha = v(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha).$$

当 $t > 0$ 时质点正在运动，所以 $v \neq 0$。另外 $\cos\alpha \neq 0$，而且 $\cos\beta \neq 0$：假如 β 是 90°，由动量可得 $V = 0$，于是 (i) 给出 $\sin(\beta-\alpha) = 0$，所以 $\beta = \alpha < 90^\circ$，矛盾。两边除以 $v\cos\alpha\cos\beta$，

$$\frac{m}{M}\tan\alpha = \tan\beta - \tan\alpha \quad\Longrightarrow\quad \tan\beta = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha.$$

> ? **想一想** 为甚么 β 不是直接等于 α?

因为斜面本身正在向左退开。相对于楔块，质点以 α 角沿斜面下滑，但楔块在后退，所以相对于地面，质点下降得更陡。留意 (ii) 的右边是一个常数：β 在每一刻都相同，所以质点沿直线运动。如果 $M \to \infty$，楔块就留在原位，而 $\beta \to \alpha$，正如所料。

第 (iii) 部分

原理：能量守恒（conservation of energy）。所有接触面都是光滑的，所以对整个系统做功的力就只有重量。（质点与斜面之间的法向反作用力会分别对两个物体做功，但这两份功互相抵消，因为相对速度沿着斜面，所以与反作用力垂直。地面的反作用力则与楔块的运动方向垂直。）楔块的质心（centre of mass）在垂直方向没有移动，所以势能（potential energy）的损失是 mgy。由静止开始，

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2.$$

利用 (ii) 中的 $V = \dfrac{m}{M}v\cos\beta$，

$$mgy = \tfrac{1}{2}mv^2 + \frac{m^2v^2\cos^2\beta}{2M}.$$

两边乘以 $2/m$，

$$2gy = v^2\left(1 + \frac{m\cos^2\beta}{M}\right) = \frac{v^2\left(M + m\cos^2\beta\right)}{M},$$

这正是所要证明的结果。

关于 y 的微分方程

质点下降的速率就是它速度的向下分量：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\sin\beta.$$

把 $v = \dot{y}/\sin\beta$ 代入 (iii)（注意由于 $\beta > \alpha > 0$，所以 $\sin\beta \neq 0$）。这就得到微分方程（differential equation）

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 = k\,y, \qquad \text{其中} \qquad k = \frac{2gM\sin^2\beta}{M + m\cos^2\beta}.$$

关键在于 k 是一个常数，因为由 (ii) 可知 β 是常数。

要解这个方程，先对 t 求导：

$$2\dot{y}\,\ddot{y} = k\,\dot{y}.$$

当 $t > 0$ 时质点正在下降，所以 $\dot{y} > 0$，我们可以除以它：$\ddot{y} = \tfrac{1}{2}k$。质点的垂直运动有恒定的加速度

$$\ddot{y} = \frac{gM\sin^2\beta}{M + m\cos^2\beta}.$$

积分两次，并利用 $t = 0$ 时 $y = 0$ 及 $\dot{y} = 0$（它由静止开始），

$$y = \frac{gMt^2\sin^2\beta}{2\left(M + m\cos^2\beta\right)},$$

这就是所求的结果。

（另一个做法是取正平方根 $\dot{y} = \sqrt{ky}$，然后分离变量（separation of variables）：$\int y^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{k}\,t$ 给出 $2\sqrt{y} = \sqrt{k}\,t$，得到相同的答案。先求导的好处，是不必顾虑 $y \equiv 0$ 这个解；它同样满足 $\dot{y}^2 = ky$ 和 $y(0) = 0$，却不是这里的运动。）

验算

- 固定的楔块。令 $M \to \infty$。这时 $\beta \to \alpha$，而 $y \to \frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha$，这是正确的：在固定的光滑斜面上，沿斜面的加速度是 $g\sin\alpha$，而它的垂直分量是 $g\sin^2\alpha$。
- 一个数值例子。取 $M = 2$、$m = 1$、$\alpha = 30°$，由 (ii) 得 $\tan\beta = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\sin^2\beta = \frac{3}{7}$、$\cos^2\beta = \frac{4}{7}$，而公式给出 $y = \frac{1}{6}gt^2$。取 $g = 9.8$ 和 $t = 1$，即 $y \approx 1.6333$。直接对楔块和质点作逐步模拟（用牛顿定律（Newton's laws），并由接触条件求出法向反作用力），得到相同的数值；而且在 2000 个随机例子中，(i)–(iii) 都在舍入误差范围内成立。

常见错误

- 说质点的运动方向与水平线成 α 角。这只是相对于楔块而言才成立。
- 沿斜面方向或垂直方向使用动量守恒。地面的反作用力是垂直方向的外力，所以只有水平分量守恒。
- 在能量方程中漏掉楔块的动能（kinetic energy）$\frac{1}{2}MV^2$。

STEP 之外

被约束在运动曲面上的质点，是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的经典试金石，你会在大学一年级或二年级学到这门学问。在那里，你选取两个坐标（例如楔块的位置和质点沿斜面下滑的距离），约束力（constraint forces）就会从方程中完全消失，所以只需几行就能得出那些恒定的加速度。关于带约束的牛顿力学，以及许多正是这一类的题目，可参阅 Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（一本力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。