详细解答

STEP II 1998，第 1 题

纯数学 · 丢番图方程与奇偶性

STEP II 1998，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s2-q1

关键思路

把立方展开后，大部分的项会互相抵消，剩下一个关于 n 的三次式，其常数项很小。比较等式两边的奇偶性（parity），可知 n 必为偶数。再把这个三次方程写成 n^2(某个式子) $= 54$ 的形式，问题便化为一个关于因数（divisor）的问题。至于 $(**)$，利用偶数代换 $n = 2m$，便直接回到 $(*)$。

解答

方程 $(*)$

利用 $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 6a^2b + 2b^3$，并取 $a = n$，$b = 3$，可得

$$(n+3)^3 - (n-3)^3 = 18n^2 + 54,$$

所以 $(*)$ 等价于

$$n^3 = 18n^2 + 54, \qquad \text{即} \qquad n^2(n-18) = 54. \tag{1}$$

n 是偶数。对于任何整数 n，右边 $18n^2 + 54 = 2(9n^2 + 27)$ 都是偶数。假如 n 是奇数，则 n^3 也是奇数，与 $n^3 = 18n^2 + 54$ 矛盾。因此 n 是偶数。

n^2 整除 54。在 (1) 的第二种写法中，$n - 18$ 是整数，所以 54 等于 n^2 乘以一个整数。因此 n^2 是 54 的因数。

? **想一想** 这两项事实合起来，怎样把所有整数都排除掉?

由于 n 是偶数，可设 $n = 2k$。于是 $n^2 = 4k^2$，它是 4 的倍数（而且 $n \neq 0$，因为把 $n = 0$ 代入 (1) 会得出 $0 = 54$）。但 $54 = 2 \times 27$ 不能被 4 整除，所以除了 0 之外，没有任何 4

的倍数能整除它。这个矛盾说明没有整数 n 满足 $(*)$。

（另一个看法：能整除 $54 = 2 \cdot 3^3$ 的平方数只有 1 和 9，所以 $n \in \{\pm 1, \pm 3\}$，而这些全是奇数。）

方程 $(**)$

现在取 $b = 6$：

$$(n+6)^3 - (n-6)^3 = 36n^2 + 432,$$

所以 $(**)$ 等价于

$$n^3 = 36n^2 + 432.$$

对于任何整数 n，右边都是偶数，所以与之前完全一样，n^3 是偶数。由于奇数的立方是奇数，n 必为偶数。

> **想一想** 为甚么不能直接照搬第一部分的因数论证？

我们固然可以写成 $n^2(n-36) = 432$，但 $432 = 2^4 \cdot 3^3$ 有不少偶数的平方因数（4、16、36、144），所以单靠整除性的论证并不能完成证明。我们改为利用偶数这个性质。设 $n = 2m$，其中 m 为整数。于是

$$8m^3 = 36 \cdot 4m^2 + 432 \quad \Longleftrightarrow \quad m^3 = 18m^2 + 54,$$

这正正是整数 m 所满足的方程 (1)。换句话说，m 满足 $(*)$。事实上，把 $n = 2m$ 代入 $(**)$，所得的不过是把 $n = m$ 代入 $(*)$ 后再全式乘以 8：

$$(2m-6)^3 + (2m)^3 - (2m+6)^3 = 8[(m-3)^3 + m^3 - (m+3)^3].$$

我们已证明没有整数满足 $(*)$，所以这样的 m 并不存在。因此没有整数 n 满足 $(**)$。

验算

- 把 $n = 1$ 代入展开式试试：$(4)^3 - (-2)^3 = 64 + 8 = 72 = 18 + 54$。✓
- 三次式 $n^3 - 18n^2 - 54$ 恰好有一个实根，约为 $n \approx 18.164$，并不是整数。（用电脑直接搜索 $|n| < 10^5$ 的范围，两个方程都找不到解。）
- 对于 $(**)$，实数解为 $n \approx 2 \times 18.164 = 36.33$，与 $n = 2m$ 这个缩放关系吻合。

常见错误

- 忘记 $n = 0$ 需要另外交代一句：0 是偶数，但 0 不是 54 的因数。在这里，(1) 已即时把它排除。

- 把立方完全展开，结果在运算中出错。恒等式 $(a+b)^3-(a-b)^3=6a^2b+2b^3$ 可以省掉一半工夫。
- 在 $(**)$ 中，尝试证明 $n^2 \mid 432$ 是行不通的。“n 是偶数”的真正用处在于代换 $n=2m$。

STEP 之外

最后一步由 $(**)$ 的一个解，得出一条形式相同但数字较小的方程的解，这是费马（Fermat）*递降法*（method of descent）的一个简单形式。反复运用这个方法，可以证明 $x^3+y^3=z^3$ 没有正整数解，这就是费马最后定理（Fermat's Last Theorem）的三次情形，最先由欧拉（Euler）证明。本题的三项构成等差数列（arithmetic progression），令问题容易得多。事实上，$(n-3k)^3+n^3=(n+3k)^3$ 表示 $t=n/k$ 是 t^3-18t^2-54 的根，而根据有理根定理（rational root theorem），这个三次式没有有理根，所以对任何 $k\neq 0$ 都没有整数解。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是一本介绍整除性、奇偶性论证和丢番图方程（Diophantine equations）的出色入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。