详细解答

STEP I 1998，第 9 题

力学 · 摆的碰撞

> **STEP I 1998，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q9

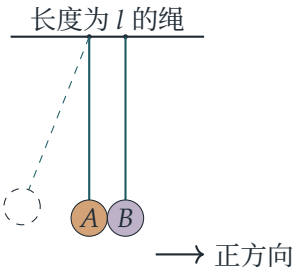
关键思路

由于位移非常小，每个球都像单摆（simple pendulum）一样作简谐运动（simple harmonic motion），而周期 $2\pi\sqrt{l/g}$ 与振幅和速率都无关。两个单摆长度相同，所以在最低点发生任何一次碰撞之后，两个球都会在同一时刻（即半个周期之后）回到最低点，而且速度方向相反。只要知道第二次碰撞在何处、何时发生，每次碰撞都只需写两行：动量守恒和牛顿实验定律（Newton's experimental law）。

解答

模型

我们把 A 和 B 视为质量为 m 的质点，各自系于长度同为 l 的不可伸长轻绳上，忽略空气阻力，并假设碰撞在瞬间完成，冲量（impulse）沿水平的连心线方向。取第一次碰撞时 A 的运动方向（由 A 指向 B）为正方向，并设 $\omega = \sqrt{g/l}$。



为何每次碰撞都在最低点发生

在小幅振动下，不论振幅多大，每个球都作角频率（angular frequency）为 ω 的简谐运动。因此，一个以速率 v 离开最低点的球，其水平位移为 $\frac{v}{\omega}\sin\omega t$，并且在时间 π/ω（半个周期）之后回到最低点，此时速度为 $-v$——对任何 v 都是如此。

第一次碰撞在最低点发生：B 静止地悬在该处，而 A 以速率 u 到达。假设某次碰撞在最低点发生，碰撞后 A 和 B 的速度分别为 $p \le q$（刚碰撞完，两球不可能互相靠近）。从最低点量起，在其后时间 t，两球之间的距离为

$$\frac{q}{\omega}\sin\omega t - \frac{p}{\omega}\sin\omega t = \frac{q-p}{\omega}\sin\omega t,$$

当 $0 < t < \pi/\omega$ 时此值为正，而在 $t = \pi/\omega$ 时为零。所以两球不可能更早相遇，而且恰好在两者都回到最低点时再次相遇。这正是题目的提示：两个单摆周期相同，所以它们总是一同回到最低点。由归纳法（induction）可知，每次碰撞都在最低点发生，而且相邻两次碰撞相隔半个周期。

第一次碰撞

设第一次碰撞刚结束时 A 和 B 的速度分别为 v_A 和 v_B。由动量守恒（conservation of momentum）（在最低点时绳的张力沿铅垂方向，所以不产生水平冲量）和牛顿实验定律，得

$$mv_A + mv_B = mu,$$
$$v_B - v_A = eu.$$

两式相加和相减，得

$$v_A = \tfrac{1}{2}u(1-e), \qquad v_B = \tfrac{1}{2}u(1+e).$$

两者都 ≥ 0，所以两个球都摆向 B 的一方（若 $e = 1$，A 会完全停下，一直悬在最低点）。

想一想 第二次碰撞前一刻的速度是多少？

半个周期之后，每个球都回到最低点，速度方向相反：A 的速度为 $-\frac{1}{2}u(1-e)$，B 的速度为 $-\frac{1}{2}u(1+e)$。B 较快，所以从后面追上 A。它相对于 A 的接近速率为 $\frac{1}{2}u(1+e) - \frac{1}{2}u(1-e) = eu$。

第二次碰撞

设第二次碰撞刚结束时 A 和 B 的速度分别为 w_A 和 w_B。由动量守恒，得

$$mw_A + mw_B = -\tfrac{1}{2}mu(1-e) - \tfrac{1}{2}mu(1+e) = -mu,$$

而由牛顿实验定律（分离速率等于接近速率 eu 的 e 倍），得

$$w_B - w_A = e \cdot eu = e^2 u.$$

两式相减和相加，得

$$w_A = -\tfrac{1}{2}u(1+e^2), \qquad w_B = -\tfrac{1}{2}u(1-e^2).$$

所以紧接第二次碰撞之后，A 的速率为 $\frac{1}{2}u(1+e^2)$，正如题目所求，而 B 的速率为 $\frac{1}{2}u(1-e^2)$，两者都朝着 A 最初被释放的那一方运动。

验算

- 完全弹性，$e=1$：最后 A 的速率为 u，而 B 静止。这是对的：第一次碰撞后 A 停下，B 取得速率 u；其后 B 以速率 u 返回，并把它全数交还给 A。
- $e=0$：两个速率都是 $\frac{1}{2}u$。两球实际上合为一体，第一次碰撞后以速率 $\frac{1}{2}u$ 一起运动，所以这也是对的。
- 第二次碰撞后的动量为 $-\frac{1}{2}mu(1+e^2) - \frac{1}{2}mu(1-e^2) = -mu$，与原来的 mu 方向相反。
- 我们模拟了两个真实（非线性）的单摆，取 $l = 1\,\mathrm{m}$，初始角度为 0.01 rad。第二次碰撞在第一次碰撞之后 1.0001 个半周期发生，位置与最低点相差不到 3×10^{-6} rad；取 $e=0.7$ 时，碰撞后的速率为 $0.745u$ 和 $0.255u$，与 $\frac{1}{2}(1+e^2)$ 和 $\frac{1}{2}(1-e^2)$ 吻合。

常见错误

- 忘记在第二次碰撞之前两个速度都已反向，把情况当作 B 撞向静止的 A。
- 在第二次碰撞时以 eu 代替 $e\cdot$(接近速率)。这里接近速率刚好是 eu，所以分离速率是 e^2u。
- 说碰撞在最低点发生，是“因为球本来就悬在那里”。真正的原因是周期与振幅无关，这也是为何球只可拉开很小的距离。

STEP 之外

等时性（isochronism，即周期与振幅无关）对单摆而言只是近似成立：摆幅较大时周期会增长，其准确值由椭圆积分（elliptic integral）给出，而碰撞位置亦会逐渐偏离最低点。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对单摆和碰撞都有严谨细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。