详细解答

STEP I 1998，第 8 题

纯数学 · 二阶微分方程

STEP I 1998，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s1-q8

关键思路

这条题目虽然披着流体力学的外衣，骨子里却是一道纯粹的微分方程（differential equation）题。左边是“导数的导数”，所以只需积分两次，并记住两次积分之间除以 r 会令常数变成对数。接着，物理上的合理性（轴上的速度必须有限）确定其中一个常数，而管壁上的无滑移条件（no-slip condition）则确定另一个。

解答

通解

将方程乘以 r，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -kr.$$

对 r 积分一次，

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{1}{2}kr^2 + A,$$

其中 A 为常数。两边除以 r（这样做没有问题，因为在管内轴线以外的地方 $r > 0$）：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\tfrac{1}{2}kr + \frac{A}{r}.$$

再积分一次，由于 $r > 0$，可写 $\ln r$ 而不必写 $\ln|r|$，

$$\boxed{v = -\tfrac{1}{4}kr^2 + A\ln r + B}$$

其中 A 和 B 为任意常数。二阶方程的通解（general solution）含有两个常数，正如所料。

轴线附近的情况

当 $r \to 0^+$ 时，$-\frac{1}{4}kr^2$ 和 B 两项保持有界（分别趋向 0 和 B），而 $\ln r \to -\infty$。因此若 $A \neq 0$，则 $A \ln r$ 趋向 $-\infty$ 或 $+\infty$（视乎 A 的正负），于是 $|v| \to \infty$。要避免这种情况，唯一的方法是取 $A = 0$，此时 $v \to B$，是有限值。

> **想一想** 为甚么我们要坚持 $A = 0$?

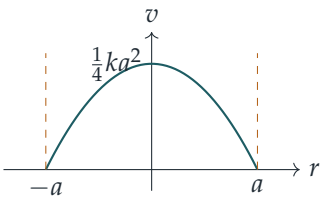
轴线 $r = 0$ 位于流体之内，所以该处的速率必须有限：现实中的流体不会沿着管道中心以无限大的速度流动。$\ln r$ 这个解在 $r > 0$ 时完全满足方程，但在这里从物理角度看却不可接受。（若是两个同轴圆柱之间的流动，轴线并不属于流体的一部分，这个解便可以保留。）

速度分布

取 $A = 0$，便有 $v = B - \frac{1}{4}kr^2$。由条件“在 $r = a$ 处 $v = 0$”得 $B = \frac{1}{4}ka^2$，所以

$$\boxed{v = \tfrac{1}{4}k\left(a^2 - r^2\right).}$$

速度分布（velocity profile）是一条抛物线：速率在轴上最大，为 $\frac{1}{4}ka^2$，到管壁处则降至零。



（图中所示为沿直径切开的截面，虚线代表管壁。）

流量

代入题目给出的公式，

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^a r \cdot \tfrac{1}{4}k\left(a^2 - r^2\right) \mathrm{d}r = \frac{\pi k}{2} \int_0^a \left(a^2 r - r^3\right) \mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi k}{2}\left[\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi k}{2} \cdot \frac{a^4}{4}, \end{aligned}$$

所以

$$\boxed{F = \frac{\pi k a^4}{8}.}$$

验算

- 将 $v = \frac{1}{4}k(a^2 - r^2)$ 代回原方程：$r\,v' = -\frac{1}{2}kr^2$，其导数为 $-kr$，再除以 r 得 $-k$，符合要求。
- 平均速率为 $F/(\pi a^2) = \frac{1}{8}ka^2$，恰好是最大速率 $\frac{1}{4}ka^2$ 的一半，这正是抛物线形速度分布广为人知的性质。
- 数值上，取 $k = 2$ 和 $a = 1$，用辛普森法则（Simpson's rule）得 $F \approx 0.785398$，与 $\pi/4$ 吻合。

常见错误

- 第一次积分时漏掉常数，于是失去 $A \ln r$ 一项，令题目中“除非”（unless）的那一部分变得毫无意义。
- 将 $-kr$ 积分得 $-\frac{1}{2}kr^2$ 之后，忘记先除以 r 便再积分。
- 在 F 的积分中漏掉因子 r：通过半径为 r 的薄圆环的流量与其圆周 $2\pi r$ 成正比，而不是与某个常数成正比。

STEP 之外

算子 $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$ 正是拉普拉斯算子（Laplacian）∇^2 在柱坐标（cylindrical coordinates）下作用于只依赖 r 的函数时的形式，所以这条题目其实就是泊松方程（Poisson's equation）$\nabla^2 v = -k$；而 $\ln r$ 这个解，则是点电荷的 $1/r$ 势在二维的对应。$F \propto a^4$ 这个结果称为泊肃叶定律（Poiseuille's law）：管道半径减半，流量便减至原来的十六分之一，这正是动脉收窄影响如此严重的原因。微分方程方面，可参阅 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（一本微分方程入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。