详细解答

STEP I 1998，第 7 题

纯数学 · 等比级数

STEP I 1998，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s1-q7

关键思路

不要逐年追踪结余，而应分开追踪每一笔存款：一笔 £a 的存款在银行里赚取了 k 年利息后，会增长至 £ar^k，而总额就是一个等比级数（geometric series）。至于提款，把同一想法反过来用即可。每一笔提款都是由起始结余中的某一部分支付的，而这部分在提取之前一直在赚取利息，所以我们比较的是同一时刻的价值。

解答

静止期结束时的金额

利率为 $\rho\%$，即每年年终结余乘以 $r = 1 + \frac{\rho}{100}$。

把存款的年份编号为 $1, 2, \ldots, m$。在第 k 年年初存入的款项，会在第 $k, k+1, \ldots, m$ 年的年终赚取利息，共 $m - k + 1$ 次。因此在第 m 年年终，它的价值为 ar^{m-k+1}。对 k 求和，第 m 年年终的结余为

$$\begin{aligned} a\left(r^m + r^{m-1} + \cdots + r\right) &= ar\left(1 + r + \cdots + r^{m-1}\right) \\ &= ar\,\frac{r^m - 1}{r - 1}, \end{aligned}$$

这里用了等比级数的求和公式（由于 $\rho > 0$，故有 $r \neq 1$）。

在其后的 l 年里，既无存款亦无提款，所以这个金额再乘以 r 共 l 次。因此这段时期结束时的总额为

$$£a\,\frac{r^{l+1}(r^m - 1)}{r - 1},$$

正如题目所求。把这个金额记作 P。

提款

第一次提款在紧接静止期之后那一年的年初进行，这正是结余为 P 的时刻。设 B_k 为刚完成第 k 次提款后的结余，则

$$B_1 = P - b, \qquad B_k = rB_{k-1} - b \quad (k = 2, \ldots, n),$$

因为在两次提款之间，这笔钱会赚取一年的利息。把这个递归关系（recurrence）逐层展开，得

$$\begin{aligned} B_n &= r^{n-1}P - b\left(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1\right) \\ &= r^{n-1}P - b\,\frac{r^n - 1}{r - 1}. \end{aligned}$$

> ? **想一想** 为甚么 P 所乘的因子是 r^{n-1}，而不是 r^n?

由第一次提款到第 n 次提款之间，只有 $n-1$ 个年终，所以这笔钱只赚取了 $n-1$ 次利息。最后一次提款之后所派的利息无关重要，因为那时户口已经清空。同样道理，第 j 次提款（由最后一次倒数，最后一次为 $j = 0$）在第 n 次提款之前会乘以 r^j。

第 n 次提款之后户口清空，所以 $B_n = 0$。由此得

$$r^{n-1}P = b\,\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

代入 P:

$$a\,\frac{r^{l+n}(r^m - 1)}{r - 1} = b\,\frac{r^n - 1}{r - 1},$$

于是

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{r^n - 1}{r^{l+n}\,(r^m - 1)}}$$

要理解这条等式，另一个等价的方法是计算“现值”（present value）。以第一次提款的时刻为准，第 k 次提款的价值为 b/r^{k-1}，而这些价值的总和必须等于 P:

$$P = b\left(1 + r^{-1} + \cdots + r^{-(n-1)}\right).$$

验算

- 若 $m = n$，答案简化为 $a/b = r^{-(l+n)}$，即 $b = ar^{l+n}$。这是合理的：把第 k 笔存款与第 k 次提款配对，两者刚好相隔 $m + l = l + n$ 年，所以每笔存款恰好支付一次提款。
- 当 $r \to 1$（没有利息）时，$\dfrac{r^n - 1}{r^m - 1} \to \dfrac{n}{m}$，所以 $a/b \to n/m$，即 $ma = nb$。存入的钱等于提出的钱。

- 取 $\rho = 5$、$m = n = 10$、$l = 5$ 及 $a = 1000$，逐年模拟得出 $P \approx 16855.58$。公式给出 $a/b = 1.05^{-15} \approx 0.48102$，所以 $b \approx 2078.93$；用这个 b 值，模拟的户口最后刚好归零。此外，用电脑以分数作精确运算，随机选取 500 组 r、l、m 和 n 的值，两条公式亦全部得到确认。

常见错误

- 在第一个和式中把 r^{m+1} 写成 r^m。由于存款是在每年*年初*存入的，即使是最后一笔存款，也会赚取一年的利息。
- 把 $r^{n-1}P$ 写成 r^nP。第 n 年年终的利息，是在户口清空之后才派发的。

STEP 之外

这就是年金（annuity）的数学。把各笔款项折现（discounting）至同一日期（即现值）再作比较，是精算数学和金融数学的基本原则。递归关系 $B_k = rB_{k-1} - b$ 是一条一阶线性差分方程（first-order linear difference equation）。它的解是一个特定的常数加上 r^k 的倍数，与我们求解一阶线性微分方程（differential equation）的方法如出一辙；大学一年级有关差分方程和微分方程的课程会探讨这种对应关系。想做更多这类题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。