详细解答

STEP I 1998，第 6 题

纯数学 · 三角函数递推关系

STEP I 1998，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s1-q6

关键思路

递推关系（recurrence）的每一步都是把某个量与一个余弦取平均，而半角恒等式（half-angle identity）$\frac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\frac{\theta}{2}$ 会把这个平均变成一个完全平方。b_{n+1} 的公式中的平方根随即又把这个平方消去。一旦留意到每一项都以前一项为因子，一般规律就不难猜出，而验证它只需一步归纳法（induction）。

解答

全题中 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，所以每个角 $x/2^k$（$k \geq 1$）都位于 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内，其余弦为正。在 b_{n+1} 的定义中，我们取正的平方根。

求 a_2 和 b_2

利用 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$，

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(\cos x + 1) = \cos^2\frac{x}{2}, \qquad b_2 = (a_2 b_1)^{1/2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^{1/2} = \cos\frac{x}{2},$$

其中最后一步用到 $\cos\frac{x}{2} > 0$。

求 a_3 和 b_3

抽出公因子 $\cos\frac{x}{2}$，然后再用一次半角恒等式，这次取 $\theta = \frac{x}{2}$：

$$a_3 = \tfrac{1}{2}\left(\cos^2\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\left(1+\cos\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}.$$

于是

$$b_3 = (a_3 b_2)^{1/2} = \left(\cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}\right)^{1/2} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4},$$

因为两个余弦都是正数。这就是题目要求的两个表达式。

一般规律

比较目前得到的各项，

$$b_2 = \cos\frac{x}{2},\quad b_3 = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4},\qquad a_2 = b_2\cos\frac{x}{2},\quad a_3 = b_3\cos\frac{x}{4}.$$

每个 b 都比前一个多乘一个余弦，角度减半；而每个 a 则是对应的 b 再乘一次它最后的那个余弦。因此我们猜想，对 $n \geq 2$，

$$b_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{x}{2^k},$$
$$a_n = b_n\cos\frac{x}{2^{n-1}} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\,\cos^2\frac{x}{2^{n-1}}.$$

想一想 要验证一个猜想满足递推关系，究竟需要检查甚么？

我们要检查两件事：猜想与初始值吻合；以及若公式对 a_n 和 b_n 成立，则递推关系会给出 a_{n+1} 和 b_{n+1} 的公式。两者合起来，便由归纳法证明公式对所有 $n \geq 2$ 成立。

初始值。当 $n = 2$ 时，猜想给出 $b_2 = \cos\frac{x}{2}$ 和 $a_2 = \cos^2\frac{x}{2}$，与上面求得的结果吻合。

归纳步骤。假设公式对某个 $n \geq 2$ 成立。设 $\theta = x/2^{n-1}$，则 $x/2^n = \theta/2$。于是

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) = b_n\cdot\tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = b_n\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

对 b_{n+1} 的猜想是 $b_n\cos\frac{\theta}{2}$（多乘一个余弦，角度为 $x/2^n$），所以上式即 $a_{n+1} = b_{n+1}\cos\frac{x}{2^n}$，正是所猜想的 a_{n+1} 的形式。接著，

$$b_{n+1} = (a_{n+1}b_n)^{1/2} = \left(b_n^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{1/2} = b_n\cos\frac{x}{2^n} = \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k},$$

这里取正根，而这样做是合理的，因为 b_n 和 $\cos\frac{x}{2^n}$ 都是正数。这正是所猜想的 b_{n+1} 的形式，所以递推关系的两条等式都得到满足，公式对所有 $n \geq 2$ 成立。

事实上，若约定空积（empty product）等于 1，公式亦给出 $b_1 = 1$ 和 $a_1 = \cos x$，所以公式由 $n = 1$ 起已经成立。

验算

- 取 $x = \frac{\pi}{3}$。直接按递推关系计算，得 $a_3 \approx 0.808013$ 和 $b_3 \approx 0.836516$，而 $\cos\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{12}$ 和 $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}$ 给出相同的数值。

- 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内随机抽取 2000 个 x，我们把递推关系与乘积公式逐一比较，直至 $n = 24$：两者相差不超过 10^{-15}。
- 当 $x \to 0$ 时，每个余弦都趋向 1，a_1 和 b_1 亦然。所有项都趋向 1，与预期相符。

常见错误

- 写下 $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$ 而没有说明为何 $\cos\theta > 0$。这里等式之所以成立，是因为每个角都位于 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内。
- 由 $n = 2$ 和 3 猜出规律后便停笔。题目要求我们验证递推关系，所以归纳步骤必不可少。

STEP 之外

把 b_n 乘以 $\sin\frac{x}{2^{n-1}}$，并反复运用 $2\sin\phi\cos\phi = \sin 2\phi$，可得 $b_n = \dfrac{\sin x}{2^{n-1}\sin(x/2^{n-1})}$。当 $n \to \infty$ 时，它趋向 $\dfrac{\sin x}{x}$（取 $x = 1$，递推关系在数十步之后给出 0.841471）。取 $x = \frac{\pi}{2}$，便得到关于 $2/\pi$ 的韦达（Viète）无穷乘积（infinite product）。这种“先取平均、再取几何平均”的做法，与高斯（Gauss）的算术几何平均（arithmetic–geometric mean）一脉相承，也是学习证明数列（sequence）收敛（converge）并求其极限（limit）的一个很好的入门例子。关于数列极限的严谨论述，可参阅 Abbott, *Understanding Analysis*（一本实分析入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。