详细解答

STEP I 1998，第 5 题

纯数学 · 复数与旋转

STEP I 1998，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s1-q5

关键思路

两部分都是让复数（complex number）的代数运算替我们完成工作。在第 (i) 部分，由正六边形（regular hexagon）的一个顶点走到下一个顶点，就是绕中心旋转（rotation）60°，而绕原点的旋转不过是乘以一个模（modulus）为 1 的复数，所以我们相对于 Q 来计算。在第 (ii) 部分，一个数是实数，当且仅当它的虚部（imaginary part）为零，所以我们把每个分母实数化（realise），再令虚部等于零。

解答

第 (i) 部分

相对于中心来计算。由 Q 到 A 的向量为

$$A - Q = (10 + 2i) - (4 + 6i) = 6 - 4i.$$

正六边形的六个顶点均匀地分布在以 Q 为圆心的圆上，所以角 AQB 是 $360^\circ/6 = 60^\circ$，而 QB 与 QA 等长。顺时针移动即是转过 -60°，也就是乘以

$$\mathrm{e}^{-i\pi/3} = \cos\tfrac{\pi}{3} - i\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

想一想 为甚么要乘 $A - Q$，而不是 A 本身？

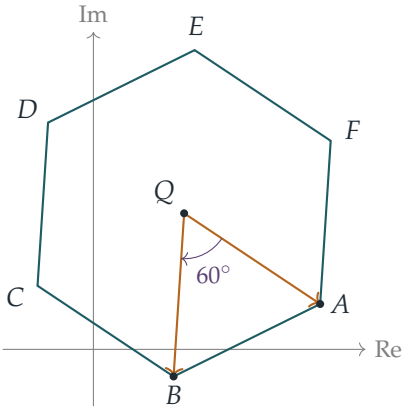
乘以 $\mathrm{e}^{-i\pi/3}$ 是绕原点旋转。要绕 Q 旋转，我们先把 Q 移到原点（减去 Q），旋转，然后

移回去（加上 Q）。所以

$$\begin{aligned} B - Q &= (6-4i)\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) \\ &= 3 - 3\sqrt{3}\,i - 2i + 2\sqrt{3}\,i^2 \\ &= (3-2\sqrt{3}) - (2+3\sqrt{3})\,i, \end{aligned}$$

再加上 $Q = 4+6i$，得

$$\boxed{B = (7-2\sqrt{3}) + (4-3\sqrt{3})\,i} \approx 3.536 - 1.196\,i.$$



图形印证了方向：A 位于 Q 的右下方，由它出发顺时针走，下一个顶点几乎在 Q 的正下方，正如我们求得的 B 那样。

第 (ii) 部分

把分子和分母同乘以共轭复数（conjugate），将每个分母实数化，当中用到 $(1+ki)(1-ki) = 1+k^2$：

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}, \qquad \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}, \qquad \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{10}.$$

由于 a、b、c 都是实数，整个算式的虚部为

$$-\frac{a}{2} - \frac{2b}{5} - \frac{3c}{10} = -\frac{5a+4b+3c}{10}.$$

这个算式是实数，当且仅当这个虚部为零，所以所求的条件是

$$\boxed{5a+4b+3c=0}.$$

（任何非零整数倍，例如 $-5a-4b-3c=0$，都是同一个条件。）事实上，由于我们求出的是虚部的准确值，这个条件既是充分条件（sufficient），也是必要条件（necessary）。

验算

- 在第 (i) 部分，$|A-Q| = |6-4i| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$。我们求得的 B 给出 $|B-Q|^2 = (3-2\sqrt{3})^2 + (2+3\sqrt{3})^2 = 21 - 12\sqrt{3} + 31 + 12\sqrt{3} = 52$，所以 B 确实在正确的圆上；而数值上亦有 $|B-A| \approx 7.211 = |A-Q|$，这正是等边三角形 QAB 所必须满足的。
- 在第 (ii) 部分，试取 $a=3$、$b=0$、$c=-5$（它们满足 $5a+4b+3c=0$）：$\frac{3(1-i)}{2} - \frac{5(1-3i)}{10} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)i = 1$，这是实数。
- 以 10 000 组满足 $c = -(5a+4b)/3$ 的随机三元组作数值检验，每一次虚部都是零。

常见错误

- 逆时针旋转（乘以 $e^{i\pi/3}$）会得到 $(7+2\sqrt{3}) + (4+3\sqrt{3})i$，那是顶点 F，而不是 B。
- 把 A 绕原点旋转，而不是绕 Q 旋转。
- 在第 (ii) 部分，令实部等于零；或者忘记了 a、b、c 必须是实数，才可以这样直接读出虚部。

STEP 之外

乘以 $e^{i\theta}$ 是一个旋转，而映射 $z \mapsto \alpha z + \beta$ 则是先旋转和放大（enlargement），再作平移（translation）；这些都是莫比乌斯变换（Möbius transformations）最简单的例子，而莫比乌斯变换是复分析（complex analysis）入门课程的研习内容。以原点为中心的正多边形，其顶点就是 z_0 乘以各个单位根（roots of unity），这个事实是大量代数和几何的起点。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）把这种从几何角度看复数乘法的观点发挥得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。