详细解答

STEP I 1998，第 4 题

纯数学 · 约束最优化

> **STEP I 1998，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q4

关键思路

内接（inscribed）于圆的长方形，其对角线就是直径（diameter），所以它的边长 a 和 b 由毕氏定理（Pythagoras' theorem）连系起来：a^2+b^2 是固定的。于是整个问题就变成：当 a^2+b^2 保持不变时，$a+b$、a^2+b^2 和 a^3+b^3 会怎样变化。$n=2$ 这个情况是转捩点：低于此值时正方形胜出，恰在此值时全部打成平手，高于此值时正方形反而敬陪末座。

解答

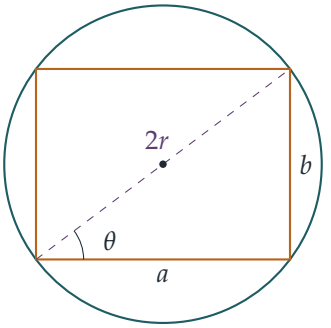
设圆的半径为 r，长方形的边长为 $a,b>0$。长方形的每个角都是直角，所以它所对的弦是直径（半圆上的圆周角）；因此每条对角线都是直径，并且

$$a^2+b^2=(2r)^2=4r^2.$$

反过来，任何满足 $a^2+b^2=4r^2$ 的 $a,b>0$ 都给出一个可放进圆内、且顶点都在圆上的长方形。所以不妨写成

$$a=2r\cos\theta,\qquad b=2r\sin\theta,\qquad 0<\theta<\tfrac{\pi}{2},$$

其中 θ 是对角线与长度为 a 的边之间的夹角。



周界

周界（perimeter）为 $P = 2(a+b)$。由于 $(a-b)^2 \geq 0$，我们有 $2ab \leq a^2 + b^2$，所以

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2+b^2) = 8r^2,$$

等号成立当且仅当 $a = b$。因为 $a + b > 0$，由此得 $a + b \leq 2\sqrt{2}\,r$，即

$$P \leq 4\sqrt{2}\,r,$$

而 $4\sqrt{2}\,r$ 这个值恰好在 $a = b = \sqrt{2}\,r$ 时取得。所以周界最大的长方形就是正方形，正如题目所要求证明的。

$n = 2$ 的情况

四条边的平方和是

$$2(a^2+b^2) = 8r^2,$$

不论是哪一个长方形都一样。所以每个内接长方形都给出相同的值：它们之间无分高下，特别是正方形并不比其他长方形优胜。

$n = 3$ 的情况

现在考虑 $S = 2(a^3+b^3)$。由于每条边都比直径短，$0 < a < 2r$ 且 $0 < b < 2r$，所以 $a^3 < 2r\,a^2$ 及 $b^3 < 2r\,b^2$。两式相加，

$$S = 2(a^3+b^3) < 2 \cdot 2r(a^2+b^2) = 16r^3.$$

另一方面，当 $\theta \to 0$ 时（一个又长又窄的长方形，其中 $a \to 2r$ 而 $b \to 0$），$S \to 2(2r)^3 = 16r^3$。所以 S 可以任意接近 $16r^3$，却永远达不到它：*并不存在使 S 最大的长方形*。唯一能达到 $16r^3$ 的“形状”是退化（degenerate）的情形，即把一条直径来回描两次，而那并不是长方形。

想一想 那么正方形又怎样了?

它由最好变成了最差。设 $f(\theta)=\cos^3\theta+\sin^3\theta$，则 $S=16r^3f(\theta)$，而

$$f'(\theta)=-3\cos^2\theta\sin\theta+3\sin^2\theta\cos\theta=3\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta-\cos\theta).$$

在 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 上，因子 $\sin\theta\cos\theta$ 是正的，而 $\sin\theta-\cos\theta$ 在 $\theta<\frac{\pi}{4}$ 时为负，在 $\theta>\frac{\pi}{4}$ 时为正。所以 f 先递减后递增，而正方形（$\theta=\frac{\pi}{4}$）给出的是最小值，

$$S_{\min}=16r^3\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=8\sqrt{2}\,r^3.$$

总括而言，对于 $n=3$，S 的取值填满区间 $[8\sqrt{2}\,r^3,\,16r^3)$：正方形给出最小值，而没有任何长方形给出最大值。

对每个 $n>2$ 情况都一样：在 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 上有 $\cos^n\theta+\sin^n\theta<\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，因为 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 都严格介乎 0 与 1 之间，所以只有把长方形压扁，才能趋近上确界 $2(2r)^n$。

验算

- 取 $r=1.7$，我们以数值方法让 θ 扫过 $(0,\frac{\pi}{2})$：周界在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 处达到峰值，其值为 $4\sqrt{2}\,r\approx 9.617$；平方和恒等于 $8r^2=23.12$；而立方和则由接近 $16r^3\approx 78.61$ 下降至正方形处的 $8\sqrt{2}\,r^3\approx 55.58$，然后再度上升，始终达不到 78.61。
- 一个简单的合理性检查：单位圆内的 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ 正方形周界为 $4\sqrt{2}\approx 5.66$，而一个 1.9×0.62 的长方形（几乎就是一条直径）周界约为 5.04。

常见错误

- 说 $n=3$ 时的最大值是 $16r^3$，“在 $\theta=0$ 处取得”。那是一条线段，不是长方形，所以最大值并不存在；你必须指出这一点，并说明为何不等式是严格的。
- 求出 $n=3$ 时的驻点（stationary point）$\theta=\frac{\pi}{4}$ 后，没有检查其性质就把它当作极大点。

STEP 之外

$n=3$ 的情况让我们初次体会上确界（supremum）与最大值（maximum）的分别：开区间上的连续函数（continuous function）不一定取得它的界，这正是极值定理（extreme value theorem）坚持要求有界闭区间的原因。在 $n=2$ 处出现的逆转，是幂平均不等式（power-mean inequalities）的一个例子，这类不等式比较不同 p 值下的 $\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}$。

Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本数学分析入门书）对上确界和极值定理有严谨细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。