详细解答

STEP I 1998，第 3 题

纯数学 · 真假命题的证明

STEP I 1998，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s1-q3

关键思路

每一部分所需的工具都不同，而首要工作是判断该命题是真是假。答“真”需要一个涵盖所有情况的证明；答“假”则只需一个反例（counterexample），或者一个说明符合要求的对象根本不可能存在的论证。取对数（logarithm）可解决 (i)，选一个合适的 θ 值可解决 (ii)，多项式（polynomial）在 θ 很大时的表现可解决 (iii)，而一个完全平方（perfect square）可解决 (iv)。

解答

第 (i) 部分：真

由于 $a > 0$，可以写成 $a = \mathrm{e}^{\ln a}$。于是

$$a^{\ln b} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^{\ln b} = \mathrm{e}^{\ln a \ln b},$$
$$b^{\ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln b}\right)^{\ln a} = \mathrm{e}^{\ln b \ln a}.$$

因为乘法符合交换律，两个指数相等，所以对所有 $a, b > 0$ 都有 $a^{\ln b} = b^{\ln a}$。（等价的说法是：两边都是正数，而且对数相同，都是 $\ln a \ln b$。）

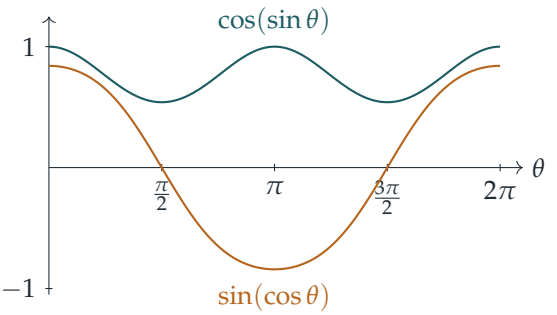
第 (ii) 部分：假

一个反例已经足够。取 $\theta = 0$：

$$\cos(\sin 0) = \cos 0 = 1, \qquad \sin(\cos 0) = \sin 1.$$

由于 $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$，可知 $0 < \sin 1 < 1$（事实上 $\sin 1 \approx 0.841$），所以两边并不相等，命题为假。

事实上两边永远不会相等；从图像可见，$\cos(\sin\theta)$ 总是在 $\sin(\cos\theta)$ 之上。



要证明这一点（本题并不要求），留意 $\sin(\cos\theta) \le \sin|\cos\theta| = \cos\left(\frac{\pi}{2} - |\cos\theta|\right)$，以及 $\cos(\sin\theta) = \cos|\sin\theta|$。$|\sin\theta|$ 和 $\frac{\pi}{2} - |\cos\theta|$ 都落在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 之内，而余弦在这个区间上递减；又因为 $|\sin\theta| + |\cos\theta| \le \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$，所以 $|\sin\theta| < \frac{\pi}{2} - |\cos\theta|$。因此对每一个 θ 都有 $\cos(\sin\theta) > \sin(\cos\theta)$。

第 (iii) 部分：假

设 P 为任意多项式。我们要证明存在某个实数 θ 使得 $|P(\theta) - \cos\theta| > 10^{-6}$，以下分两种情况讨论。

P 为常数，设 $P(\theta) = c$。取 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$，此时 $\cos\theta$ 分别是 1 和 -1，由三角不等式（triangle inequality）得

$$|c-1| + |c+1| \ge |(c+1) - (c-1)| = 2,$$

所以 $|c-1|$、$|c+1|$ 之中至少有一个不小于 1，远远大于 10^{-6}。

P 的次数（*degree*）为 $n \ge 1$，设 $P(\theta) = a_n\theta^n + \cdots + a_0$，其中 $a_n \ne 0$。当 $\theta \ne 0$ 时，

$$P(\theta) = a_n\theta^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n\theta} + \cdots + \frac{a_0}{a_n\theta^n}\right),$$

当 $\theta \to \infty$ 时，括号内的式子趋向 1，而 $|a_n\theta^n| \to \infty$。所以 $|P(\theta)| \to \infty$，我们可以选一个 θ 使得 $|P(\theta)| > 2$。对这个 θ，由于 $|\cos\theta| \le 1$，

$$|P(\theta) - \cos\theta| \ge |P(\theta)| - |\cos\theta| > 2 - 1 = 1 > 10^{-6}.$$

在两种情况下，该不等式都会在某处不成立，所以这样的多项式并不存在。

想一想 可是 $\cos\theta$ 的麦克劳林级数（Maclaurin series）是一个类似多项式的和，而且可以要多接近就有多接近。为甚么把它截断不行呢?

在任何固定的有界区间（bounded interval）上，只要取足够多项，截断后的麦克劳林级数与 $\cos\theta$ 的差距*确实*在 10^{-6} 之内。但命题要求的是同一个多项式对*所有实数* θ 都适用，而每一个非常数多项式最终都会奔向 $\pm\infty$，$\cos\theta$ 却始终困在 $[-1,1]$ 之内。正是“对所有实数 θ”这几个字令命题为假。

第 (iv) 部分：真

对 $x>0$,

$$x^4+3+x^{-4}-5=x^4-2+x^{-4}=\left(x^2-x^{-2}\right)^2\geq 0,$$

因为实数的平方必为非负数。因此对所有 $x>0$ 都有 $x^4+3+x^{-4}\geq 5$，而等号恰好在 $x^2=x^{-2}$ 时成立，即 $x=1$ 时。（另一个做法：由算术平均—几何平均不等式（AM–GM inequality）得 $x^4+x^{-4}\geq 2\sqrt{x^4\cdot x^{-4}}=2$。）

总结：(i) 真，(ii) 假，(iii) 假，(iv) 真。

验算

- (i)：取 $a=2$、$b=3$，$2^{\ln 3}$ 和 $3^{\ln 2}$ 都约等于 2.141；随机选取正数 a,b，两边相符，相对误差约为 10^{-15}。
- (ii)：在一整个周期内对 θ 取样，$\cos(\sin\theta)-\sin(\cos\theta)$ 从未低于约 0.107。
- (iii)：cos 的 20 次麦克劳林多项式在 $\theta=1$ 时很准确，但在 $\theta=10$ 时误差约为 7.5，在 $\theta=30$ 时误差约为 10^{11}。
- (iv)：在细密的格点上，x^4+3+x^{-4} 的最小值是 5，在 $x=1$ 时取得。

常见错误

- 只检查几个数值就想“证明”一个假命题，或者因为代数运算出错而“否证”了一个真命题：动笔之前，先判断每一部分是真是假。
- 在 (iii) 中忘记了常数多项式：“趋向无穷”的论证需要次数至少为 1。
- 在 (iii) 中引用泰勒级数（Taylor series），把它当作处处适用的多项式；它并不是。

STEP 之外

第 (iii) 部分与魏尔斯特拉斯逼近定理（Weierstrass approximation theorem）形成对比：在任何有界闭区间上，每一个连续函数（continuous function）都可以用多项式一致逼近（uniform approximation），精确度要多高就有多高。但在整条实数线上一致逼近是不可能的，原因正是上面的增长论证。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门书）讨论了魏尔斯特拉斯定理和一致收敛（uniform convergence）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。