详细解答

STEP I 1998，第 2 题

纯数学 · 代换积分法

STEP I 1998，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s1-q2

关键思路

那个不好处理的式子 $(x^2+1)^{1/2}+x$ 位于 f 之内，所以最自然的做法就是把它整个设为 t。出人意表的是，这个关系很容易反过来解：先把根式单独移到一边再平方，x^2 项便会互相抵消，剩下的 x 只是 t 的一个简单函数。第一条恒等式（identity）一旦到手，第二个积分不过是 $\mathrm{f}(t)=t^{-3}$ 的特殊情况。

解答

变量代换

设

$$t=(x^2+1)^{1/2}+x.$$

当 x 由 0 走到 ∞ 时，$(x^2+1)^{1/2}$ 和 x 都在递增，所以 t 严格递增（strictly increasing），由 $x=0$ 时的 $t=1$ 出发，并随 $x\to\infty$ 趋向 ∞。因此这个代换（substitution）是由 $[0,\infty)$ 到 $[1,\infty)$ 的一对一（one-to-one）满射，新的积分上下限是 1 和 ∞。

想一想 怎样把 x 用 t 表示出来?

把平方根单独移到一边，然后平方：由 $t-x=(x^2+1)^{1/2}$ 得

$$t^2-2tx+x^2=x^2+1 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{t^2-1}{2t}=\frac{1}{2}(t-t^{-1}),$$

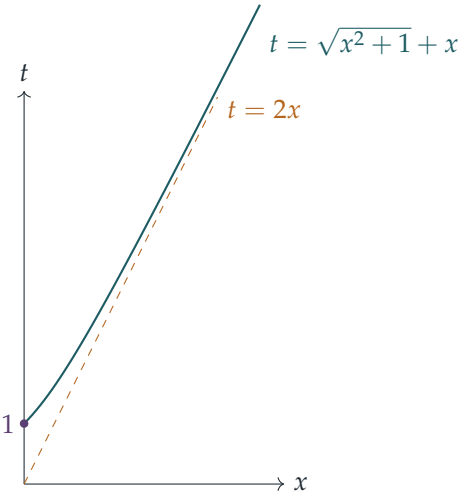
其中因为 $t\geq 1$, 除以 t 并无问题。(平方可能会引入增根, 但这里 $t-x=(t+t^{-1})/2>0$, 所以我们平方的那个根确实是正数。) 求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}(1+t^{-2}).$$

因此

$$\int_0^\infty \mathrm{f}((x^2+1)^{1/2}+x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \mathrm{f}(t)\cdot\frac{1}{2}(1+t^{-2})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_1^\infty (1+t^{-2})\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t,$$

这正是所求的恒等式。



从草图可见，t 由 1 开始稳定上升，所以值域中没有任何部分被重复覆盖。

最后部分

取 $\mathrm{f}(t) = t^{-3}$。恒等式的左边正好就是我们要求的积分，所以

$$\begin{aligned}\int_0^\infty ((x^2+1)^{1/2}+x)^{-3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_1^\infty (t^{-3}+t^{-5})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{2}t^{-2}-\tfrac{1}{4}t^{-4}\right]_1^\infty \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8},\end{aligned}$$

正如所求。两个广义积分（improper integral）都收敛（converge），因为 t^{-3} 和 t^{-5} 在 $[1,\infty)$ 上可积。

想一想 有没有更简洁的方法去理解这个代换?

有：设 $x = \sinh\theta$。这样 $(x^2+1)^{1/2} = \cosh\theta$，所以 $t = \cosh\theta + \sinh\theta = \mathrm{e}^\theta$。我们的公式 $x = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$ 其实就是 $\sinh\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^\theta - \mathrm{e}^{-\theta})$ 换了个样子而已。

验算

- 当 $x = 0$ 时，$t = 1$，而 $x = \frac{1}{2}(1-1) = 0$：反函数公式吻合。当 $x = \frac{3}{4}$ 时，$t = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$，而 $\frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$。
- 当 x 很大时，$t \approx 2x$，所以最后部分的被积函数（integrand）表现得像 $(2x)^{-3}$，积分必定收敛。
- 数值上，对原来的积分使用辛普森法则（Simpson's rule）得 0.375000，与 $\frac{3}{8}$ 相符。第一部分的恒等式亦可用数值方法验证：取 $\mathrm{f}(t) = \mathrm{e}^{-t}$（两边均为 0.258187）和 $\mathrm{f}(t) = 1/(1+t^4)$（两边均为 0.188387）时都成立。

常见错误

- 忘记更改积分上下限：下限变成 $t = 1$，而不是 $t = 0$。
- 把 $\mathrm{d}t$ 用 x 表示，然后苦苦设法消去 x；先把 x 用 t 表示，再对它求导，会容易得多。

STEP 之外

这条恒等式说的是在单调（monotonic）映射下的变量代换；在分析学中，对于广义积分，这是通过取 $[0, X]$ 上积分的极限来证明其合理性的。这个代换本身就是 sinh 的反函数：$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{arsinh} x$，这正是 t 原来等于 $\mathrm{e}^{\operatorname{arsinh} x}$ 的原因。如欲参考有关广义积分和代换的严谨论述，可参阅 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。