详细解答

STEP I 1998，第 14 题

概率与统计 • 几何概率

STEP I 1998，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s1-q14

关键思路

硬币落在哪里，完全取决于它的圆心落在哪里。由于棋盘的图案规则地重复，我们可以假设圆心在单独一个 2×2 正方形内均匀分布（uniformly distributed），于是每一种结果都对应该正方形内的一个区域。把“压过一条线”和“盖住一个交点”转化为圆心与各条线及各个角的距离所满足的条件，概率（probability）便变成面积，而这个面积是 a 的二次式，我们可以求其最大值。

解答

税款加倍的概率

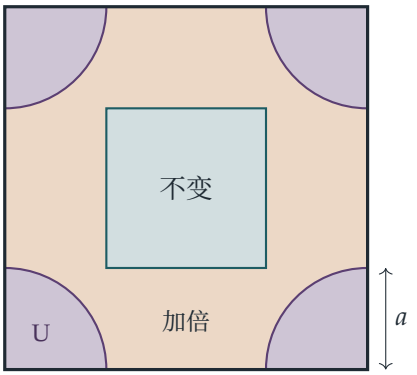
设硬币的圆心均匀随机地落在方格网的其中一个正方形内；棋盘很大，所以边缘效应可以忽略，而且每个正方形看起来都一样。在这个正方形上设立坐标，使它成为 $[0,2] \times [0,2]$，方格线沿着它的四边。

设 U 为圆心到最近的垂直线的距离，V 为圆心到最近的水平线的距离。由于 x 坐标在 $[0,2]$ 上均匀分布，$U = \min(x, 2-x)$ 在 $[0,1]$ 上均匀分布；同理 V 在 $[0,1]$ 上均匀分布，而且因为 x 与 y 独立（independent），U 与 V 亦独立。所以 (U,V) 在单位正方形 $[0,1]^2$ 上均匀分布，而概率就是该正方形内的面积。

- 硬币不压过任何线，当且仅当 $U > a$ 且 $V > a$。其概率为 $(1-a)^2$。
- 硬币盖住一个交点，当且仅当正方形最近的一个角与圆心的距离小于 a，即 $U^2 + V^2 < a^2$。由于 $a < 1$，这个四分之一圆盘完全位于 $[0,1]^2$ 之内，所以概率为 $\frac{1}{4}\pi a^2$。

这两个事件互斥（disjoint）：如果硬币盖住一个交点，它必定压过通过该交点的线。（硬

币刚好碰到一条线之类的边界情况，概率为零，所以用 $<$ 还是 $\leq$ 都没有分别。）



2

图中显示圆心在一个正方形内的可能位置：蓝绿色（没有压过任何线）和紫红色（盖住一个交点，在其中一个角标示为 U）的区域令税款不变；琥珀色的区域令税款加倍。

所以税款加倍的概率为

$$\begin{aligned} p(a) &= 1-(1-a)^2-\tfrac{1}{4}\pi a^2 \\ &= 2a-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)a^2. \end{aligned}$$

使税收最大

要征得最多的税，就要令加倍的机会尽可能大，所以我们在 $0<a<1$ 的范围内求 $p(a)$ 的最大值。它是一个首项系数为负的二次函数，而

$$p'(a)=2-2\left(1+\frac{\pi}{4}\right)a=0 \iff a=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)^{-1}.$$

这个值是 $\frac{4}{4+\pi}\approx 0.560$，确实位于 $(0,1)$ 之内，而且由于 $p''(a)<0$，它给出最大值，正如题目所求。以 a^* 表示这个值，则有 $(1+\frac{\pi}{4})a^{*2}=a^*$，所以最大值为

$$p_{\max}=2a^*-a^*=a^*=\frac{4}{4+\pi}.$$

n 年后税款的期望值

想一想 为甚么每年的期望增长倍数是 $1+p$ 而不是 $2p$?

在税款没有加倍的年份，税款维持不变，所以它是乘以 1，而不是乘以 0。设 M_k 为第 k 年的倍数：$M_k=2$ 的概率为 p，$M_k=1$ 的概率为 $1-p$。于是

$$\mathrm{E}(M_k)=2p+(1-p)=1+p=1+\frac{4}{4+\pi}=\frac{8+\pi}{4+\pi}.$$

假设每年的投掷互相独立。n 年后的税款为每头 yak $T_n = M_1 M_2 \cdots M_n$ Slihings（由 1 开始），而独立随机变量（random variables）之积的期望值（expectation）等于它们各自期望值之积，所以

$$\mathrm{E}(T_n) = \mathrm{E}(M_1)\,\mathrm{E}(M_2)\cdots\mathrm{E}(M_n) = \left(\frac{8+\pi}{4+\pi}\right)^n,$$

正如题目所求。

验算

- 当 $a \to 0$ 时，硬币几乎从不碰到任何线；当 $a = 1$ 时，它必定压过一条线，所以 $p(1) = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$，即避开角上圆盘的机会。两者都与公式吻合，而最大值位于两者之间。
- 以 400 000 个随机圆心进行模拟，在 $a = 0.56$ 时得出 $p \approx 0.5620$，而公式给出 0.5601。对 a 作精细搜索，得出最大值位于 $a \approx 0.5601 = 4/(4+\pi)$。
- 以 $p = 4/(4+\pi)$ 模拟每年的加倍，得出 3 年后税款的平均值约为 3.805，而 $\left(\frac{8+\pi}{4+\pi}\right)^3 \approx 3.797$。

常见错误

- 从“不压线”的面积中减去“盖住交点”的面积，或者把它计算了两次。这两个事件互斥，两者都要从 1 中减去。
- 在每个角使用整个圆盘的面积 πa^2，忘记了只有四分之一位于正方形之内（等价地说，每个角上的圆盘由四个正方形共用）。
- 把税款的期望值写成 $(2p)^n$，忘记了没有加倍的年份税款维持不变。

STEP 之外

这是蒲丰投针问题（Buffon's needle problem）的近亲：把随机放置的物件化为基本区域（fundamental region）内的一个随机点，概率便成为面积。这个想法是*几何概率*（geometric probability）和积分几何（integral geometry）的起点，由此可得出一些出人意表的结果，例如以投针来估算 π。最后一部分用到独立随机变量的期望值可以相乘这个事实，这正是金融学和种群生物学中乘法增长模型的基础。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率入门）涵盖了这两个想法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。