详细解答

# STEP I 1998，第 12 题

概率与统计 · 计数与独立性

> **STEP I 1998，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q12

## 关键思路

这一题从头到尾都是计数（counting）。只要知道解的总数，以及其中有多少个解的 $X$ 等于某个指定的值，每个概率（probability）就是两个数目之比。至于独立性（independence），最快捷的检验方法是考虑一个极端情况：找出一对数值，使联合概率（joint probability）根本不可能等于边际概率（marginal probability）之积。最后一部分中，“$XYZ$ 可被 5 整除”的意思是“$X, Y, Z$ 之中最少有一个可被 5 整除”，这就要用上容斥原理（inclusion–exclusion）。

## 解答

### 数算解的数目

若固定 $X = x$（其中 $0 \le x \le 20$），则 $Y$ 可取 $0, 1, \ldots, 20 - x$ 中的任何一个值，而 $Z = 20 - x - Y$ 随之确定，并且是非负数。因此恰好有 $21 - x$ 个解满足 $X = x$，而解的总数为

$$N = \sum_{x=0}^{20} (21 - x) = 21 + 20 + \cdots + 1 = \frac{21 \cdot 22}{2} = 231.$$

（这正是“隔板法”（stars and bars）的数目 $\binom{22}{2}$：把 20 颗星和 2 块隔板排成一行。）每个解的概率均为 $1/231$，而

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{21 - x}{231}, \qquad x = 0, 1, \ldots, 20.$$

根据对称性（symmetry），$Y$（以及 $Z$）有相同的分布（distribution）。

### $X$ 与 $Y$ 是否独立?

不是。取 $X = 20$ 和 $Y = 20$。这两个事件各自都有可能发生：

$$\mathrm{P}(X = 20) = \mathrm{P}(Y = 20) = \frac{1}{231} > 0,$$

但两者不可能同时发生，因为 $X + Y \leq 20$。所以

$$\mathrm{P}(X = 20,\ Y = 20) = 0 \neq \frac{1}{231^2} = \mathrm{P}(X = 20)\,\mathrm{P}(Y = 20),$$

故 $X$ 与 $Y$ 并不独立。直观地说，$X$ 的值越大，留给 $Y$ 的空间就越少。

> ? **想一想** 只说“$X + Y \leq 20$，所以它们显然是相关的”不就够了吗?

想到这样的限制条件，直觉是对的；但独立性是一个关于概率的精确陈述，所以论证时应该举出一对数值，使得 $\mathrm{P}(X = x, Y = y) \neq \mathrm{P}(X = x)\mathrm{P}(Y = y)$。只需一个反例（counterexample）便已足够，而 $(20, 20)$ 这对极端数值令计算变得轻而易举。

### $X$ 可被 5 整除

范围内 5 的倍数为 $X = 0, 5, 10, 15, 20$，对应的解分别有 $21, 16, 11, 6, 1$ 个。所以

$$\mathrm{P}(5 \mid X) = \frac{21 + 16 + 11 + 6 + 1}{231} = \frac{55}{231} = \frac{5}{21},$$

正如题目所求。

### $XYZ$ 可被 5 整除

由于 5 是质数（prime），$5 \mid XYZ$ 当且仅当 5 整除 $X$、$Y$、$Z$ 之中最少一个。（谨记 0 也算是可被 5 整除。）设 $A$、$B$、$C$ 分别为 $X$、$Y$、$Z$ 可被 5 整除的解所组成的集合。由上一部分可知 $|A| = |B| = |C| = 55$。

考虑 $A \cap B$：设 $X = 5a$、$Y = 5b$，其中 $a, b \geq 0$ 且 $a + b \leq 4$。这样的数对共有 $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ 个。在每一个情况下，$Z = 20 - 5a - 5b$ 同样是 5 的倍数，所以

$$|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = |A \cap B \cap C| = 15.$$

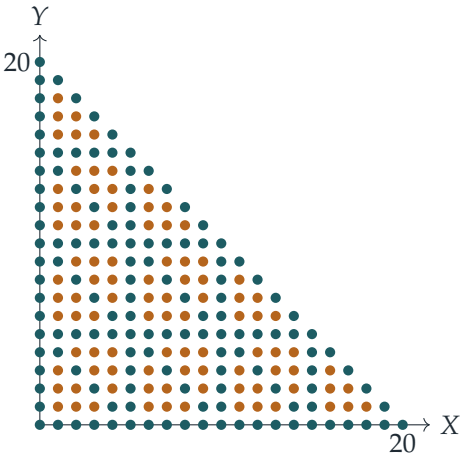
根据容斥原理,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= 3 \cdot 55 - 3 \cdot 15 + 15 \\ &= 135, \end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{P}(5 \mid XYZ) = \frac{135}{231} = \frac{45}{77}.$$

下图把各个解表示为满足 $X+Y \le 20$ 的格点（lattice point）$(X,Y)$。蓝绿色的点位于直线 $X=5k$、$Y=5k$ 或 $X+Y=20-5k$（即 $Z=5k$）其中之一上，而琥珀色的点则是 $X,Y,Z$ 全都不是 5 的倍数的 96 个解。




## 验算

- 补集（complement）应有 $231-135=96$ 个解，其中 $X,Y,Z$ 全都不是 5 的倍数：这就是图中琥珀色的点。用电脑列出全部 231 个解，并以精确分数计算，可确认 96、$|A\cap B|=15$、5/21 以及 $135/231=45/77\approx 0.584$ 均正确。
- 对 5/21 作一个合理性检查：$X$ 可被 5 整除的概率比 1/5 稍大，因为 $X$ 取较小的值的可能性最高，而 $X=0$ 更是最有可能出现的值。

## 常见错误

- 忘记 0 可被 5 整除。漏掉 $X=0$ 会得出 34/231，而不是 5/21。
- 直接计算 $3\times\frac{5}{21}$，这样会把重叠的部分重复计算多次。本题的重叠部分相当大：只要其中两个变量是 5 的倍数，第三个也必然是。
- 论证两者相关时，没有举出一对令乘法法则不成立的具体数值。

## STEP 之外

从所有解中均匀随机地选取一个，等同于随机选取 20 分成三部分的一个有序分拆（composition）。若把 20 换成总和 $n$，并让 $n$ 增大，$(X/n, Y/n)$ 便会趋于在一个三角形上均匀分布，这是狄利克雷分布（Dirichlet distribution）最简单的情况。容斥原理是处理“最少

一个”这类事件的标准工具，它还会在错排（derangement）和欧拉函数（Euler's totient function）中再次出现。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）对计数和独立性这两方面的概念均有论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。