详细解答

STEP I 1998，第 11 题

力学 • 跨过滑轮的连接质点

STEP I 1998，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s1-q11

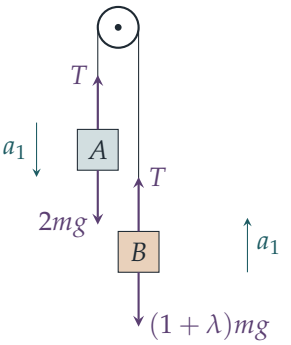
关键思路

每次往返分为两个阶段，而在每个阶段中各质量保持不变，所以加速度是常数，可以使用 $s = \frac{1}{2}at^2$。下行时，盛满水的桶比矿石连桶更重，两者合起来就是一部阿特伍德机（Atwood machine）。回程上行时，桶 A 是空的而且没有质量，所以没有任何东西拉住 B：它只是自由下坠（falls freely）。至于第二部分，“在很长的时间内运上最多矿石”的意思是“每个循环运上的矿石量除以每个循环所需的时间要最大”。

解答

一个循环所需的时间

模型：两个桶连同所盛之物视为质点（particle），链是轻而不可伸长的（light and inextensible），滑轮细小、光滑而且轻。因此链两端的张力（tension）T 相同，而两个桶以相同的速率运动。当 A 在顶部时，B 在底部（链的长度为 l），所以每个阶段中每个桶都移动距离 l。



第 1 阶段：A 下降。桶 A 盛有质量 $2m$ 的水；桶 B 的总质量为 $m+\lambda m=(1+\lambda)m$。设 a_1 为两者共同的加速度（A 向下，B 向上）。对每个桶应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$\begin{aligned} A\text{（向下）：}&\quad 2mg-T=2ma_1,\\ B\text{（向上）：}&\quad T-(1+\lambda)mg=(1+\lambda)ma_1. \end{aligned}$$

两式相加消去 T：

$$(1-\lambda)mg=(3+\lambda)ma_1 \quad\Longrightarrow\quad a_1=\frac{(1-\lambda)g}{3+\lambda},$$

由于 $\lambda<1$，这个值是正数，所以 A 确实下降。由静止出发，以恒加速度移动距离 l，有 $l=\frac{1}{2}a_1t_1^2$，所以

$$t_1=\sqrt{\frac{2l}{a_1}}=\sqrt{\frac{2l}{g}}\sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}.$$

想一想 在第 2 阶段，桶 A 完全没有质量。链的张力是多少?

第 2 阶段：B 下降。现在 A 是空的，所以它的质量为零，而 B 的质量为 m。对没有质量的桶 A，牛顿定律给出 $T-0\cdot g=0\cdot a$，所以 $T=0$：一条轻链若另一端系着的东西没有质量，就无法拉动任何物体。因此 B 由静止以加速度 g 自由下坠，经过距离 l，由 $l=\frac{1}{2}gt_2^2$ 得

$$t_2=\sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

（用阿特伍德机的公式，取质量为 0 和 m，也得到同样的答案：$a=\frac{m-0}{m+0}g=g$。）这个阶段结束时，A 第一次回到顶部。

总时间。由在顶部释放 A 起，到它第一次回到顶部为止，所需的时间为

$$\boxed{t_1+t_2=\sqrt{\frac{2l}{g}}\left(1+\sqrt{\frac{3+\lambda}{1-\lambda}}\right)=\sqrt{\frac{2l}{g}}\,\frac{(1-\lambda)^{1/2}+(3+\lambda)^{1/2}}{(1-\lambda)^{1/2}}}$$

使运上的矿石量最大

以 $\tau(\lambda)=t_1+t_2$ 表示循环时间。每个循环运上质量为 λm 的矿石，而整个过程不断以完全相同的方式重复。在一段很长的时间 S 内，共有 $\lfloor S/\tau\rfloor$ 个完整循环，所以运上的矿石量介乎 $\lambda m\,(S/\tau-1)$ 与 $\lambda m\,S/\tau$ 之间。当 S 远大于 τ 时，那个未完成的循环所损失的部分可以忽略，运上的矿石量基本上就是

$$\frac{\lambda mS}{\tau(\lambda)}=mS\sqrt{\frac{g}{2l}}\,\frac{\lambda(1-\lambda)^{1/2}}{(1-\lambda)^{1/2}+(3+\lambda)^{1/2}}=mS\sqrt{\frac{g}{2l}}\,\mathrm{f}(\lambda).$$

因子 $mS\sqrt{g/2l}$ 与 λ 无关，所以我们必须选取 $\lambda\in(0,1)$，使 $\mathrm{f}(\lambda)$ 尽可能大。

想一想 为甚么最佳的 λ 必定是驻点（stationary point），而不是端点?

函数 f 在 $(0,1)$ 上可导（differentiable），因为在该区间内 $1-\lambda>0$ 和 $3+\lambda>0$，而且分母是正数。它在 $(0,1)$ 上取正值，并且在两端都趋向 0：当 $\lambda\to 0$ 时，因子 λ 趋向零（没有运载矿石）；当 $\lambda\to 1$ 时，因子 $(1-\lambda)^{1/2}$ 趋向零（两个桶几乎平衡，所以第 1 阶段需时极长）。因此 f 的最大值在区间内部的某一点取得，而可导函数若在内点取得极大值，该处的导数必为零。所以最佳的 λ 满足 $f'(\lambda)=0$，这正是所要证明的。

验算

- 极限情况：当 $\lambda\to 1$ 时，第 1 阶段中两个桶的质量分别为 $2m$ 和 $2m$，所以 $a_1\to 0$ 而 $t_1\to\infty$，与公式吻合。
- 当 $\lambda\to 0$ 时，得 $a_1=g/3$，正是质量为 $2m$ 和 m 的阿特伍德机的惯常数值。
- 数值上，取 $g=9.8$，对随机选取的 λ 和 l 逐步模拟运动，结果与公式一致：例如 $\lambda=0.504$、$l=26.9$ 给出的循环时间为 8.568 s。以数值方法求 f 的最大值，得 $\lambda\approx 0.704$；而在一段很长的时间内计数完整循环的数目，也得到同一个最佳的 λ。

常见错误

- 忘记了桶 B 本身的质量 m，在第 1 阶段用了 λm 而不是 $(1+\lambda)m$。
- 把第 2 阶段当作带有某个张力的阿特伍德机来处理：由于 A 没有质量，B 是自由下坠的。
- 求每个循环运上的矿石量 λm 的最大值，而不是每单位时间运上的矿石量的最大值。载得愈重，循环愈慢。

STEP 之外

把一个速率（每个循环的产出除以每个循环的时间）最优化，正是概率论中*更新报酬定理*（renewal–reward theorem）背后的想法：在那里循环的长度是随机的，而长远的报酬率仍然等于每个循环的平均报酬除以平均循环长度。这里的力学是恒加速度运动，Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）由此出发，发展成对质点系统的完整论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。