详细解答

STEP I 1998，第 10 题

力学 • 抛体运动

STEP I 1998，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/98-s1-q10

关键思路

我们不知道抛射角，也不需要知道：答案只以 v、r 和 t 表示。因此要找一条能消去这个角的关系式。最简洁的做法是用向量（vector）来思考：质点（particle）经过时间 t 后的落点，等于初速度乘以 t，再加上重力造成的下坠 $\frac{1}{2}gt^2$。这三个向量构成一个直角三角形，余下的工夫交给毕氏定理（Pythagoras' theorem）就可以了。

解答

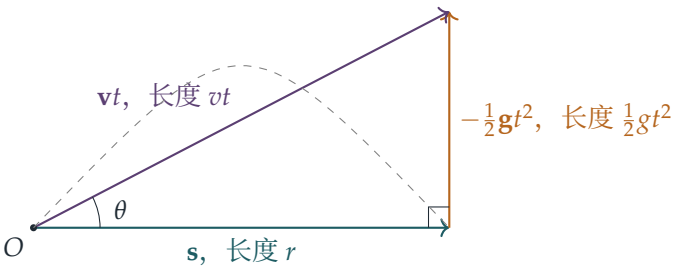
我们把每一粒泥土看成一个质点，只受重力作用而自由运动（不计空气阻力），由位于地面的爆炸中心 O 出发。垂直向上射出的质点会落在 O，所以可取 $r > 0$，并设抛射角（angle of projection）θ 为与水平方向所成的仰角，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。

著地时间

在恒定加速度 $\mathbf{g}$（垂直向下）之下，经过时间 t 后的位移（displacement）为

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2,$$

其中 $\mathbf{v}$ 是初速度，其大小为 v。在著地的一刻，$\mathbf{s}$ 是水平的，长度为 r。移项后得 $\mathbf{v}t = \mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$，即一个长度为 r 的水平向量与一个长度为 $\frac{1}{2}gt^2$ 的垂直（向上）向量之和。



这两个向量互相垂直，所以根据毕氏定理，

$$v^2t^2 = r^2 + \left(\tfrac{1}{2}gt^2\right)^2 = r^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4.$$

两边乘以 g^2，并设 $u = \frac{1}{2}g^2t^2$（于是 $u^2 = \frac{1}{4}g^4t^4$ 及 $g^2v^2t^2 = 2v^2u$），上式变成

$$u^2 - 2v^2u + g^2r^2 = 0,$$

这是 u 的二次方程（quadratic）。它的根为

$$\tfrac{1}{2}g^2t^2 = u = v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2r^2},$$

这正是所要求的结果。

想一想 如果不用向量，我们怎样消去 θ?

用分量（components）。水平方向有 $r = vt\cos\theta$；垂直方向，落在地面即表示 $0 = vt\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$，所以 $vt\sin\theta = \frac{1}{2}gt^2$（因为 $t \neq 0$）。把两式平方后相加，再利用 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，便再次得到 $v^2t^2 = r^2 + \frac{1}{4}g^2t^4$。向量图不过是把这个计算画成一个三角形而已。

只有当 $v^4 \geq g^2r^2$，即 $r \leq v^2/g$ 时，两个根才都是实数：这就是大家熟悉的最大射程（maximum range）。当 $r < v^2/g$ 时，两个根都是正数（两根之积为 $g^2r^2 > 0$，两根之和为 $2v^2 > 0$），所以有两个著地时间，一个属于高抛，一个属于平射。由于 $t = 2v\sin\theta/g$ 随 θ 递增，$+$ 号对应较陡的轨迹（trajectory），即 $\theta > \frac{\pi}{4}$，而 $-$ 号则对应较平的轨迹。

最大高度

整段飞行是对称的：垂直速度 $v\sin\theta - gt'$ 在 $t' = \frac{1}{2}t$ 时为零，即飞行的中途。由最高点起，质点（在垂直方向上）由静止下坠，历时 $\frac{1}{2}t$，所以最大高度为

$$H = \tfrac{1}{2}g\left(\tfrac{1}{2}t\right)^2 = \tfrac{1}{8}gt^2 = \frac{1}{4g}\cdot\tfrac{1}{2}g^2t^2.$$

利用第一部分的结果，

$$H = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - g^2r^2}}{4g},$$

其中 $+$ 号对应较陡的轨迹，$-$ 号对应较平的轨迹（当 $r < v^2/g$ 时两者皆有可能；当 $r = v^2/g$ 时两者重合，此时 $H = v^2/(4g)$）。

验算

- 垂直发射：$r = 0$ 给出 $\frac{1}{2}g^2t^2 = 2v^2$，所以 $t = 2v/g$，而 $H = v^2/(2g)$，与预期相符。另一个根 $t = 0$、$H = 0$，则是贴着地面掠过的一击。
- 两个高度之和为 $v^2/(2g)$。这是理所当然的：两条轨迹的抛射角互为余角，即 θ 和 $\frac{\pi}{2} - \theta$，而 $\frac{v^2\sin^2\theta}{2g} + \frac{v^2\cos^2\theta}{2g} = \frac{v^2}{2g}$。
- 数值上，取 $g = 9.8$、$v = 20$ 和 $\theta = 1$ 弧度，逐步模拟运动可得 $t \approx 3.4346$ 和 $H \approx 14.450$；取 $+$ 号的公式给出 3.4346 和 14.450。余角的情况则与 $-$ 号吻合（$t \approx 2.2053$，$H \approx 5.958$）。

常见错误

- 只给出一个高度。速率相同的质点可以沿两条不同的路径到达同一点，而 $\pm$ 号会一直带到 H 的式子里。
- 把 H 写成 θ 的式子便停下来。题目只要求以 v、r 和 g 表示，所以藉 $H = \frac{1}{8}gt^2$ 这条关系式连系到第一部分，才是最省力的途径。

STEP 之外

这个关于 t^2 的二次方程，是“轨迹的包络线（envelope）”在时域上的版本：满足 $v^4 = g^2r^2$ 的点（以及离开地面时的抛物面（paraboloid）$z = \frac{v^2}{2g} - \frac{gr^2}{2v^2}$）标示出泥土所能到达的区域的边界，而在这个区域内，每一点都恰好有两条轨迹经过。曲线族的包络线，是大学一年级课程中偏微分（partial differentiation）的一个漂亮应用。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）以恰到好处的程度讲解抛体运动（projectile motion）和向量运动学。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。