详细解答

STEP I 1998，第 1 题

纯数学 · 数字模式的计数

> **STEP I 1998，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/98-s1-q1

关键思路

不要尝试把数逐个列出。应该先选定出现的是哪两个数字，再计数同时用上这两个数字的五位数字串（string）。唯一的麻烦是一个数不能以 0 开头，所以我们按 0 是否两个数字之一来分开计数。另外，别忘了检查范围的两端。

解答

由 10 000 到 99 999 的每个整数都恰好有五位，而且首位数字不是零。范围内余下的唯一整数是 100 000，我们留到最后处理。

一个五位数恰好含有两个不同的数字，即是说它的所有数字都来自某一对 $\{a,b\}$，而且 a 和 b 都确实出现。每个这样的数都决定了它所属的那一对，所以我们可以逐对计数，然后相加。

情况 1：两个数字都不是 0

从 $1,2,\ldots,9$ 中选出两个不同的数字，共有 $\binom{9}{2}=36$ 种选法。对于固定的一对 $\{a,b\}$，五个位置各自可以是 a 或 b，得出 $2^5=32$ 个数字串。其中两个只用了一个数字（$aaaaa$ 和 $bbbbb$），所以有 $32-2=30$ 个同时用上两个数字。它们全都不以 0 开头，所以这 30 个都是真正的五位数。这个情况得出

$$36\times 30=1080.$$

? **想一想** 为甚么不能用完全相同的方法处理 $\{0,a\}$ 这一对？

因为在 32 个由 0 和 a 组成的数字串之中，有一半以 0 开头，而这些并不是五位数（例如

$0a0aa$ 其实是一个四位数）。所以我们必须先固定首位数字，然后才计数。

情况 2：其中一个数字是 0

另一个数字 a 可以是 $1,\ldots,9$ 中的任何一个，共 9 种选择。首位数字不能是 0，所以必定是 a。余下四个位置各自可以是 0 或 a，得出 $2^4 = 16$ 种可能。当中恰好有一个，即 $aaaa$，不含 0，这样整个数便只有一个不同的数字。所以对每个 a 都有 $16 - 1 = 15$ 个数，这个情况得出

$$9 \times 15 = 135.$$

端点 100 000

这个范围包括两个端点，而 100 000 只用了 1 和 0 这两个数字，所以它也要计算在内。

总数

$$1080 + 135 + 1 = 1216.$$

所以这样的整数共有 **1216** 个。

验算

- 用电脑检查由 10 000 到 100 000 的每一个整数，计数其中数字所组成的集合大小为 2 的数，结果是 1216。这也印证了上面的分拆：1080 个不含 0，135 个含有它，再加上 100 000。
- 把同一方法用于一个可以用手逐一列出的较小情况。对于两位数，这方法得出 $\binom{9}{2}(2^2 - 2) + 9(2^1 - 1) = 72 + 9 = 81$。这与直接计数的结果吻合：共有 90 个两位数，减去 9 个各位数字相同的数（repdigit）$11, 22, \ldots, 99$。

常见错误

- 忘记了 100 000，得出 1215。遇到“包括首尾”的范围，务必留意两个端点。
- 计算成 $\binom{10}{2} \times 30 = 1350$，这把以 0 开头的数也算了进去。
- 在情况 2 中减去 2 而不是 1：全是零的数字串在我们把首位数字固定为 a 时已经排除了。

STEP 之外

从所有由 $\{a,b\}$ 组成的数字串中减去只用一个数字的数字串，这个技巧是容斥原理（inclusion–exclusion principle）最简单的情况。一般而言，长度为 n 而且用上全部 k 个给定符号的字串，数目是 $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$，也就是 $k!$ 乘以一个第二类斯特灵数（Stirling number of the second kind）。这类计数结果在组合数学（combinatorics）和概率（probability）中随处可见，例如优惠券收集问题（coupon collector problem）。想多做这类计数题，可以试试 Grimmett and Welsh 的 *Probability: An Introduction*，或者 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 中的组合数学题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。