详细解答

# STEP III 1997，第 9 题

力学 • 涉及弹簧的静力学

**STEP III 1997，第 9 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s3-q9

## 关键思路

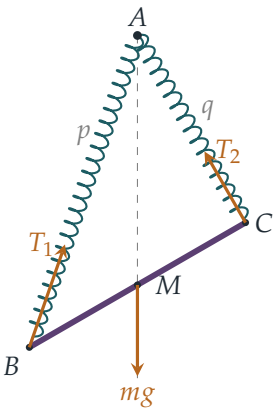
作用在杆上的力只有三个：两条弹簧的张力（tension）和杆本身的重量。当一个物体在三个互不平行的力作用下处于平衡（equilibrium）时，这三个力的作用线（line of action）必定通过同一点。两个张力的作用线都通过 $A$，所以重量的作用线也必须通过 $A$，亦即杆的中点位于 $A$ 的正下方。之后，沿水平方向分解力，几乎就完成余下的工作。

## 解答

我们把杆视为均匀（uniform）的刚体（rigid body），质量为 $m$，中点为 $M$。两条弹簧都是轻弹簧，遵从虎克定律（Hooke's law），弹簧常数同为 $\kappa$，而且都处于拉伸状态。设弹簧 $AB$ 和 $AC$ 的自然长度（natural length）分别为 $a$ 和 $b$，拉伸后的长度分别为 $p$ 和 $q$，则张力为

$$T_1 = \kappa(p - a), \qquad T_2 = \kappa(q - b),$$

由于弹簧都被拉长，两者皆为正数。




**第 1 步：$M$ 位于 $A$ 的正下方**

对杆取关于 $A$ 的力矩（moment）。张力 $T_1$ 沿 $BA$ 作用，$T_2$ 沿 $CA$ 作用，所以两条作用线都通过 $A$，两者关于 $A$ 的力矩均为零。因此，垂直通过 $M$ 的重量关于 $A$ 的力矩也必须为零，即通过 $M$ 的铅垂线通过 $A$。于是 $M$ 位于 $A$ 的正下方；设它在 $A$ 下方的深度为 $h > 0$。

**第 2 步：沿水平方向分解**

以 $A$ 为原点建立坐标轴，$x$ 轴为水平方向（在杆所在的铅垂平面内），$y$ 轴铅垂向上。则 $M = (0, -h)$，而由于 $M$ 是 $BC$ 的中点，我们可以写成

$$B = (-d,\ -h-e), \qquad C = (d,\ -h+e)$$

其中 $d$、$e$ 为某些常数。这里 $d$ 是杆在水平方向上的半阔度，而 $d \neq 0$ 正是因为杆并非铅垂。

$AB$ 中的张力作用于杆上的 $B$ 点，方向由 $B$ 指向 $A$，即沿向量（vector）$\overrightarrow{BA} = (d,\ h+e)$，其长度为 $p$。所以这个力是 $\dfrac{T_1}{p}(d,\ h+e)$。同理，在 $C$ 点的张力是 $\dfrac{T_2}{q}(-d,\ h-e)$。

沿水平方向分解，得

$$\frac{T_1}{p}\,d - \frac{T_2}{q}\,d = 0,$$

而由于 $d \neq 0$，

$$\frac{T_1}{p} = \frac{T_2}{q}.$$

? **想一想** 我们究竟在哪里用到“杆并非铅垂”这个事实?

只在约去 $d$ 的时候。假如杆铅垂悬挂，两条弹簧便会落在同一条铅垂线上，水平方向的

分解式只会变成 $0=0$，而两个张力可以成任何比例，只需满足铅垂方向的平衡。这种铅垂的平衡状态确实会出现，而在这些情况下，结论一般并不成立。

**第 3 步：引入虎克定律**

代入张力，得

$$\frac{\kappa(p-a)}{p}=\frac{\kappa(q-b)}{q}\quad\Longrightarrow\quad 1-\frac{a}{p}=1-\frac{b}{q}\quad\Longrightarrow\quad \frac{a}{p}=\frac{b}{q},$$

所以

$$\frac{p}{q}=\frac{a}{b}.$$

拉伸后长度之比等于自然长度之比，这正是所要证明的。 ■

为完整起见，沿铅垂方向分解可得 $\frac{T_1}{p}(h+e)+\frac{T_2}{q}(h-e)=mg$，即 $2h\frac{T_1}{p}=mg$。我们用不着这条式，但它确定了 $T$/长度 这个共同的值。

## 验算

- 诠释。由于 $p/q=a/b$，两条弹簧都按相同的倍数伸长：对某个 $\lambda>1$，有 $p=\lambda a$ 及 $q=\lambda b$。所以这两条弹簧就像一条均匀的弹簧按比例放大一样，这是记住答案的一个好方法。
- 数值检验。我们随机选取 $m,\kappa,a,b$ 和杆的长度，以数值方法求势能（potential energy）$mgy_M+\frac{1}{2}\kappa(p-a)^2+\frac{1}{2}\kappa(q-b)^2$ 的最小值，从而找出平衡状态。例如，当 $a/b=0.709972$ 时，一个倾斜的平衡状态给出 $p/q=0.709972$，而 $M$ 位于 $A$ 的正下方，误差在 $10^{-7}$ 之内。同一次搜索亦找到一些 $p/q\neq a/b$ 的铅垂平衡状态（例如 $a/b=1.526$ 但 $p/q=1.192$），这证实了题目的假设确有必要。

## 常见错误

- 假设两个张力相等，或假设两条弹簧与铅垂线所成的角相等。两者一般都不成立；相等的是张力除以长度。
- 对 $M$ 取力矩，结果纠缠于各个角度之中。对 $A$ 取力矩简洁得多，因为两个张力的作用线都通过 $A$。
- 从没用到“杆并非铅垂”这个条件。完整的答案应指出哪里需要这个条件。

## STEP 之外

我们用到的向量 $\frac{T}{p}\overrightarrow{BA}$ 是表示弹簧力的自然写法。自然长度为零的弹簧所施的力，恰好与位移向量成正比，而这类“理想”弹簧能把许多平衡问题化为线性代数（linear algebra）。更一般地说，平衡状态是势能的驻点（stationary point），这正是我们数值检验背后的想法，也是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的起点。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对静力学（statics）和能量观点都有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。