详细解答

STEP III 1997，第 8 题

纯数学 · 二次型的对角化

STEP III 1997，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s3-q8

关键思路

一个对称矩阵（symmetric matrix）描述一个二次型（quadratic form）$ax^2+2bxy+cy^2$，而共轭（conjugate）后的矩阵 $R_{-\alpha}AR_\alpha$ 则描述同一个二次型在旋转了 α 的坐标轴下的样子。把它化成对角矩阵（diagonal matrix），xy 项便会消失，于是在新坐标轴下椭圆（ellipse）处于标准位置，其半轴（semi-axes）长度可以直接读出。由于旋转保持各点与原点的距离不变，这两条半轴的长度正是我们要找的极端距离。

解答

全题记

$$R_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\qquad R_{-\alpha}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=R_\alpha^{\mathsf{T}}.$$

第 (i) 部分

设 $C=\cos\alpha$ 及 $S=\sin\alpha$。首先

$$AR_\alpha=\begin{pmatrix}aC+bS & -aS+bC\\ bC+cS & -bS+cC\end{pmatrix},$$

再从左边乘以 $R_{-\alpha}$，右上角的元素是

$$\begin{aligned}C(-aS+bC)+S(-bS+cC)&=b(C^2-S^2)-(a-c)SC\\&=b\cos 2\alpha-\tfrac{1}{2}(a-c)\sin 2\alpha.\end{aligned}$$

因为 A 是对称的，所以 $R_{-\alpha}AR_\alpha=R_\alpha^{\mathsf{T}}AR_\alpha$ 也是对称的（它的转置（transpose）就是它本身），故左下角的元素与右上角相同，一个条件便同时处理了两者。这个矩阵是对角矩

阵，当且仅当

$$\tan 2\alpha = \frac{2b}{a-c} \quad (a \neq c), \qquad \text{故可取} \qquad \alpha = \tfrac{1}{2}\arctan\frac{2b}{a-c}.$$

若 $a = c$，条件变成 $b\cos 2\alpha = 0$，取 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 即可（若同时有 $b = 0$，则 A 本身已是对角矩阵，任何 α 都可以）。

第 (ii) 部分

把椭圆的方程展开，得

$$x^2 + y^2 + 4xy\cot 2\theta + 4x^2\cot^2 2\theta = 1,$$

而 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$。比较系数，得

$$a = 1 + 4\cot^2 2\theta, \qquad b = 2\cot 2\theta, \qquad c = 1.$$

于是 $a - c = 4\cot^2 2\theta \neq 0$（因为 $0 < 2\theta < \frac{1}{2}\pi$），并且

$$\frac{2b}{a-c} = \frac{4\cot 2\theta}{4\cot^2 2\theta} = \tan 2\theta,$$

所以 $\alpha = \theta$ 满足第 (i) 部分的条件：$R_{-\theta}AR_\theta$ 是对角矩阵。

至于对角线上的元素，按第 (i) 部分同样的乘法可得

$$\text{左上角} = aC^2 + 2bSC + cS^2, \qquad \text{右下角} = aS^2 - 2bSC + cC^2,$$

这里 $C = \cos\theta$, $S = \sin\theta$。设 $k = \cot 2\theta$ 及 $\mu = \cos 2\theta$, 并利用 $2SC = \sin 2\theta$、$k\sin 2\theta = \mu$、$C^2 = \frac{1}{2}(1+\mu)$、$S^2 = \frac{1}{2}(1-\mu)$ 以及 $k^2 = \mu^2/(1-\mu^2)$。对于右下角的元素，

$$\begin{aligned}(1+4k^2)S^2 - 2k\sin 2\theta + C^2 &= 1 + 4k^2S^2 - 2\mu \\ &= 1 - 2\mu + \frac{2\mu^2(1-\mu)}{(1-\mu)(1+\mu)} = \frac{(1-2\mu)(1+\mu)+2\mu^2}{1+\mu} \\ &= \frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta} = \tan^2\theta.\end{aligned}$$

用完全相同的方法，左上角的元素是 $1 + 2\mu + \dfrac{2\mu^2}{1-\mu} = \dfrac{1+\mu}{1-\mu} = \cot^2\theta$。所以

$$R_{-\theta}AR_\theta = \begin{pmatrix} \cot^2\theta & 0 \\ 0 & \tan^2\theta \end{pmatrix}.$$

想一想 有没有快捷的方法，不必重做一次代数运算，也能确认这两个元素是对的?

有。共轭不会改变矩阵的迹（trace）和行列式（determinant）。这里 $\det A = ac - b^2 = 1 + 4k^2 - 4k^2 = 1$，而的确 $\cot^2\theta \tan^2\theta = 1$。另外 $\operatorname{tr} A = 2 + 4\cot^2 2\theta$，而由于 $\cot\theta - \tan\theta = \dfrac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2\cot 2\theta$,

$$\cot^2\theta + \tan^2\theta = (\cot\theta - \tan\theta)^2 + 2 = 4\cot^2 2\theta + 2.$$

第 (iii) 部分

以 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ 引入新坐标，使 X 轴和 Y 轴就是原来的坐标轴旋转 θ 所得。由于 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_\theta^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_{-\theta}$，椭圆的方程变成

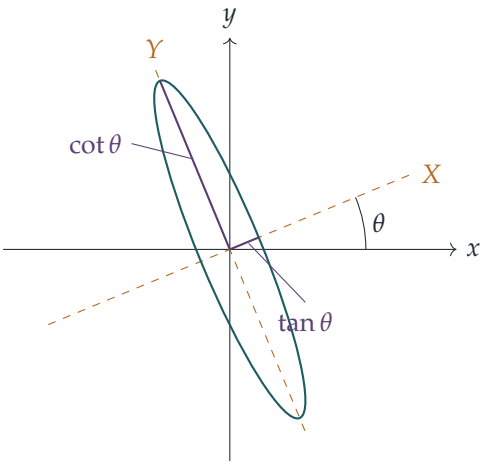
$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} R_{-\theta} A R_\theta \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 1, \qquad \text{即} \qquad X^2\cot^2\theta + Y^2\tan^2\theta = 1.$$

这个方程在 $(X, Y) \mapsto (-X, -Y)$ 之下不变，所以椭圆的中心是原点。旋转保持长度不变，因此中心到某一点的距离是 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{X^2 + Y^2}$。

因为 $0 < \theta < \frac{1}{4}\pi$，我们有 $0 < \tan\theta < 1 < \cot\theta$，所以 $\tan^2\theta < \cot^2\theta$。对椭圆上任何一点，

$$\tan^2\theta\,(X^2 + Y^2) \;\le\; X^2\cot^2\theta + Y^2\tan^2\theta = 1 \;\le\; \cot^2\theta\,(X^2 + Y^2),$$

所以 $\tan^2\theta \le r^2 \le \cot^2\theta$，即 $\tan\theta \le r \le \cot\theta$。左边的不等式在 $X = 0$ 时取等号，即在 $(X, Y) = (0, \pm\cot\theta)$；右边的不等式在 $Y = 0$ 时取等号，即在 $(X, Y) = (\pm\tan\theta, 0)$。两个界限都能达到，所以中心到椭圆的最短和最长距离分别是 $\tan\theta$ 和 $\cot\theta$，正如题目所求。



上图所示为 $\theta = \frac{1}{8}\pi$ 的情况，虚线是旋转后的坐标轴。

验算

- $(0, \pm 1)$ 在椭圆上，而 $\tan\theta < 1 < \cot\theta$，与上述界限吻合。
- 当 $\theta = \frac{1}{8}\pi$ 时，长轴（major axis）的端点在原坐标下是 $\cot\theta\,(-\sin\theta, \cos\theta) = (-\cos\theta, \cos^2\theta/\sin\theta) \approx (-0.924,\ 2.230)$。这时 $\cot 2\theta = 1$，而 $0.924^2 + (2.230 - 1.848)^2 \approx 0.854 + 0.146 = 1$，正如所料。
- 数值上，对若干个 θ 值沿椭圆扫描 200 000 个方向，在 $\theta = 0.3$ 时得出最短距离 0.309336 和最长距离 3.232728，与 $\tan 0.3$ 和 $\cot 0.3$ 相符。

常见错误

- 把 xy 的系数当作 b 而不是 $2b$：二次型是 $ax^2 + 2bxy + cy^2$。
- 搞乱了哪个旋转放在哪一边：若 $\mathbf{x} = R_\theta \mathbf{X}$，行向量便是 $\mathbf{X}^{\mathsf{T}} R_{-\theta}$，这就是出现 $R_{-\theta} A R_\theta$ 的原因。
- 以为系数较大的那条轴较长：$\cot^2\theta X^2$ 的系数较大，所以椭圆在 X 方向上反而是短的。

STEP 之外

这是谱定理（spectral theorem）的二维情况：每个实对称矩阵都可以用旋转对角化（diagonalise），而对角线上的元素就是它的特征值（eigenvalues）。二次型的特征值可用来为圆锥曲线（conics）和二次曲面（quadric surfaces）分类；同一个想法在力学中给出惯量主轴（principal axes of inertia），在统计学中给出主成分（principal components）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对对称矩阵和二次型的讲解十分易读。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。