详细解答

STEP III 1997，第 7 题

纯数学 • e 的无理性

> **STEP III 1997，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q7

关键思路

级数（series）a_n 正好就是 $n!\,\mathrm{e}$ 去掉整数部分（integer part）之后余下的东西：把级数 $\mathrm{e} = \sum 1/k!$ 乘以 $n!$，直至 $k = n$ 为止的每一项都变成整数，而尾段则变成 a_n。等比级数（geometric series）b_n 的作用，是逐项为 a_n 提供一个容易处理的上界（upper bound）。一旦知道尾段严格介乎 0 与 1 之间，假如 e 是有理数（rational number），就会有某个 $n!\,\mathrm{e}$ 既是整数，小数部分（fractional part）却又不等于零，这是荒谬的。

解答

第 (i) 部分

级数 b_n 是等比级数，首项为 $\frac{1}{n+1}$，公比（common ratio）为 $r = \frac{1}{n+1}$。由于 $n \geq 1$，我们有 $0 < r \leq \frac{1}{2} < 1$，所以它收敛（converges），而且

$$b_n = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

第 (ii) 部分

把两个级数的第 k 项分别写成

$$u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad v_k = \frac{1}{(n+1)^k}.$$

u_k 的分母中有 k 个因子 $n+1, n+2, \ldots, n+k$，每一个都至少是 $n+1$，所以 $(n+1)(n+2)\cdots(n+k) \geq (n+1)^k$，因此

$$0 < u_k \leq v_k \quad \text{对所有} k \geq 1.$$

等号只在 $k=1$ 时成立；当 $k\geq 2$ 时，因子 $n+2$ 严格大于 $n+1$，所以 $u_k<v_k$。

所有项都是正数，并且不超过收敛级数 b_n 的对应项，所以 a_n 收敛（根据比较判别法（comparison test）），而且 $a_n\geq u_1>0$。至于上界，

$$b_n-a_n=\sum_{k\geq 1}(v_k-u_k)\;\geq\; v_2-u_2=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0,$$

因为每一项 v_k-u_k 都是非负的。于是 $a_n<b_n=\frac{1}{n}$，合起来便得

$$0<a_n<\frac{1}{n},$$

这正是所要证明的。

> **想一想** 为甚么单凭“a_n 的每一项都不超过 b_n 的对应项”，并不足以得出严格不等式（strict inequality）？

逐项的 $\leq$ 在取极限后只能给出 $a_n\leq b_n$；把无穷多项相加时，严格不等式有可能变成等式。正因如此，我们挑出 $k=2$ 这一项，它的差距是一个确定的正数，再指出其余各项的差距全都 ≥ 0。

第 (iii) 部分

利用级数 $\mathrm{e}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$，乘以 $n!$，并在 $k=n$ 处把和式拆开：

$$n!\,\mathrm{e}=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}}_{N}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!}.$$

当 $k\leq n$ 时，$\frac{n!}{k!}=(k+1)(k+2)\cdots n$ 是整数，所以 N 是正整数。当 $k=n+j$ 而 $j\geq 1$ 时，

$$\frac{n!}{(n+j)!}=\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+j)}=u_j,$$

所以尾段正好就是 a_n。因此

$$n!\,\mathrm{e}=N+a_n,\qquad N\in\mathbb{Z},\quad 0<a_n<\tfrac{1}{n}\leq 1,$$

这里用到第 (ii) 部分及 $n\geq 1$。一个形如（整数）$+$（$[0,1)$ 内的某数）的数，其整数部分就是那个整数，所以 $[n!\,\mathrm{e}]=N$，因此

$$a_n=n!\,\mathrm{e}-[n!\,\mathrm{e}].$$

第 (iv) 部分

采用反证法（proof by contradiction），假设 $\mathrm{e}=\frac{p}{q}$，其中 p,q 为正整数。取 $n=q$，则

$$n!\,\mathrm{e}=q!\cdot\frac{p}{q}=(q-1)!\,p$$

是整数，所以它等于自身的整数部分，而由第 (iii) 部分得 $a_q = 0$。但第 (ii) 部分指出 $a_q > 0$。这个矛盾说明 e 是无理数（irrational number）。

（任何 $n \geq q$ 同样可行，因为 q 整除 $n!$；重点只在于必定有某个 $n!\,\mathrm{e}$ 是整数。）

验算

当 $n = 1$ 时：$1!\,\mathrm{e} = 2.71828\ldots$，所以小数部分是 $0.71828\ldots$，而把 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots$ 加起来同样得到 $0.71828\ldots$，明显小于 $b_1 = 1$。当 $n = 5$ 时，$a_5 \approx 0.19382$，仅仅略小于 $\frac{1}{5}$：随着 n 增大，这个界相对而言愈来愈紧，因为 a_n 与 b_n 的首项相同。用电脑以精确分数验算，可确认对 1 至 29 的每一个 n，都有 $0 < a_n < \frac{1}{n}$ 以及 $n!\,\mathrm{e} = N + a_n$，其中 $[n!\,\mathrm{e}] = N$。

常见错误

- 仅仅因为对所有 k 都有 $u_k \leq v_k$，就声称 $a_n < b_n$。你需要有一项是严格较小的（这里是 $k = 2$），才能保住严格不等式。
- 忘记了 $\sum_{k \leq n} n!/k!$ 为何是整数：原因是当 $k \leq n$ 时，$k!$ 整除 $n!$。
- 在第 (iv) 部分只用 $0 < a_n$，或只用 $a_n < 1$。两边都不可或缺：$a_n < 1$（来自第 (ii) 部分）令我们能够确定 a_n 就是小数部分，而 $a_n > 0$ 则带来矛盾。

STEP 之外

这是傅里叶（Fourier）对 e 是无理数的证明，而它的模式（证明一个本应是整数的量严格介乎 0 与 1 之间）是许多无理性证明的蓝本，包括 π 的无理性，以及 $r \neq 0$ 为有理数时 e^r 的无理性。在大学第一门分析（analysis）课程中，你会严格地论证比较判别法和 e 的级数，并且明白这个论证之所以行得通，全靠 $\sum 1/k!$ 收敛得够快：分数逼近 e 的效果，远远好于逼近任何有理数时所能做到的。Abbott 的 *Understanding Analysis* 涵盖级数方面的内容，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 则是有理逼近（rational approximation）的一本出色入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。