详细解答

# STEP III 1997，第 6 题

纯数学 · 切比雪夫微分方程

> **STEP III 1997，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q6

## 关键思路

因子 $1-x^2$ 与 $x=\cos\theta$ 并列，只暗示一件事：$1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$。只要用链式法则（chain rule）小心地换元，这条关于 $x$ 的棘手方程，就会变成关于 $\theta$ 的简谐运动（simple harmonic motion）方程。我们解出该方程，再用两个附带条件定出常数。至于递推关系（recurrence），其实是乔装了的复角恒等式（compound-angle identity）。全题中 $n$ 为非负整数。条件 $y_n(x)=(-1)^n y_n(-x)$ 只有在这个情况下才有意义。

## 解答

### 变量代换

设 $x=\cos\theta$，其中 $0<\theta<\pi$，故 $\sin\theta>0$，且 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta=-\sin\theta\neq 0$。为简化记号，我们把 $y_n$ 写成 $y$。由链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.$$

要再对 $x$ 求导一次，我们先对 $\theta$ 求导，再乘以 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x=-1/\sin\theta$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)\\&=\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}.\end{aligned}$$

现在利用 $1-x^2=\sin^2\theta$ 和 $x=\cos\theta$ 代入：

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n^2y&=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+n^2y\\&=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y.\end{aligned}$$

两个一阶导数项刚好互相抵消。因此题目所给的方程等价于 $\dfrac{\mathrm{d}^2y_n}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2y_n=0$，正是所求。

> ? **想一想** 为甚么 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 不就是 $\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}$？

因为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 是一个乘积：$-1/\sin\theta$ 乘以 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta$。两个因子都取决于 $\theta$，所以用积法则（product rule）会得出两项。多出来的那一项，恰好抵消了 $-x\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 一项，这正是题目中有这一项的原因。

### 求解 $y_n$

当 $n\geq 1$ 时，$y''+n^2y=0$ 的通解（general solution）为

$$y_n=A\cos n\theta+B\sin n\theta.$$

当 $n=0$ 时，方程是 $y''=0$，故 $y_0=A+B\theta$。

*在 $x=1$ 的条件。* $x=1$ 对应 $\theta=0$，而由 $y_n(1)=1$ 可知两种情况下都有 $A=1$。

*对称条件。* 把 $x$ 换成 $-x$，即是把 $\theta$ 换成 $\pi-\theta$，因为 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$，而且 $\pi-\theta$ 仍然在 $[0,\pi]$ 之内。对于整数 $n\geq 1$，

$$\cos n(\pi-\theta)=(-1)^n\cos n\theta,\qquad \sin n(\pi-\theta)=-(-1)^n\sin n\theta.$$

所以 $(-1)^n y_n(-x)=(-1)^n[A(-1)^n\cos n\theta-B(-1)^n\sin n\theta]=A\cos n\theta-B\sin n\theta$。令此式对所有 $\theta$ 都等于 $y_n(x)=A\cos n\theta+B\sin n\theta$，得 $2B\sin n\theta=0$，故 $B=0$。当 $n=0$ 时，条件变成对所有 $\theta$ 都有 $1+B\theta=1+B(\pi-\theta)$，同样必须有 $B=0$。

因此，对每个非负整数 $n$，

$$\boxed{y_n=\cos n\theta},\qquad \text{即}\quad y_n(x)=\cos(n\arccos x)\quad(|x|\leq 1).$$

关系式 $\theta=\arccos x$ 把 $[-1,1]$ 映满 $[0,\pi]$，所以结果对 $|x|\leq 1$ 成立。端点 $x=\pm 1$（$\theta=0,\pi$）则由连续性（continuity）补上。

### 推论

取 $n=0$ 和 $n=1$：$y_0=\cos 0=1$，$y_1=\cos\theta=x$。

至于递推关系，把以下两条复角公式相加：

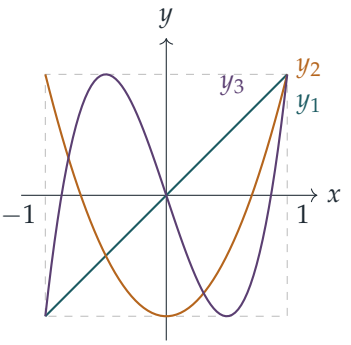
$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta, \qquad \cos(n-1)\theta = \cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta\sin\theta.$$

正弦项互相抵消，余下 $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$。以 $x$ 表示，即

$$y_{n+1} - 2xy_n + y_{n-1} = 0 \qquad (n \geq 1,\ |x| \leq 1),$$

这就是所要求的结果。

由 $y_0 = 1$ 和 $y_1 = x$ 出发，递推关系会产生一个个多项式（polynomial）：$y_2 = 2x^2 - 1$、$y_3 = 4x^3 - 3x$、$y_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$，如此类推。




每个 $y_n$ 在 $[-1, 1]$ 上都介乎 $-1$ 与 $1$ 之间；它既然是余弦，这是必然的。

## 验算

- $y_2 = 2x^2 - 1$：此时 $(1-x^2)\cdot 4 - x\cdot 4x + 4(2x^2-1) = 0$。它满足 $n = 2$ 时的方程，而且 $y_2(1) = 1$，并且是偶函数（even function）。
- $y_n$ 的奇偶性（parity）与 $(-1)^n$ 吻合。例如 $y_3 = 4x^3 - 3x$ 是奇函数（odd function）。
- 数值上，取 $x = 0.3$：$\cos(2\arccos 0.3) = -0.82 = 2(0.3)^2 - 1$。再以有限差分（finite difference）检验 $y_n = \cos(n\arccos x)$（$0 \leq n \leq 8$）是否满足原方程，所得残差（residual）均小于 $10^{-5}$。

## 常见错误

- 求二阶导数时忘记用积法则，以致一阶导数项无法抵消。
- 保留了 $\sin n\theta$ 这个解。它满足微分方程（differential equation）和 $y_n(1) = 1$（因为 $\sin 0 = 0$），但不符合对称条件。题目设下这个条件，正是为了把它剔除。
- 忘记 $n = 0$ 要另外处理：这时通解是 $A + B\theta$，而不是一对余弦和正弦。

## STEP 之外

多项式 $y_n$ 就是切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials）$T_n(x)$。题目所给的方程就是切比雪夫方程。我们舍弃的第二个解 $\sin(n \arccos x)$，是 $\sqrt{1-x^2}$ 乘以一个多项式。切比雪夫多项式在逼近理论（approximation theory）中占有核心地位。在所有 $n$ 次首一多项式（monic polynomial）之中，$2^{1-n}T_n$ 在 $[-1,1]$ 上的最大绝对值最小，因此对许多数值方法而言，$T_n$ 的零点是最佳的插值（interpolation）节点。至于这类方程的级数解（series solution），以及由此衍生的特殊函数（special functions），可参阅 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。