详细解答

# STEP III 1997，第 5 题

纯数学 · 摆线的弧长

> **STEP III 1997，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q5

## 关键思路

滚动车轮边缘上的一点，所描出的轨迹是一条摆线（cycloid）。只要把该点的位置用车轮转过的角度表示出来，这道题就只是一个弧长（arc length）积分。滚动条件（不打滑）把轮心的运动与转角连系起来，而半角恒等式（half-angle identity）则令弧长公式中的平方根一下子化简。

## 解答

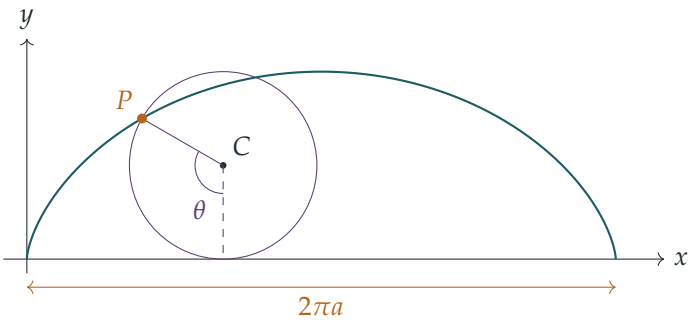
### 建立路径

设车轮半径为 $a$，沿 $x$ 轴作无滑动的滚动。开始时，标记的点 $P$ 在原点与地面接触，并设 $\theta$ 为车轮转过的角度（以弧度计）。

由于没有打滑，车轮走过的地面长度等于与地面接触过的轮缘长度，所以轮心 $C$ 移动了距离 $a\theta$，位于 $(a\theta,\, a)$。相对于 $C$ 而言，点 $P$ 起初在它的正下方，其后转过了角度 $\theta$（车轮向右滚动，故为顺时针方向），所以 $P$ 位于 $C + (-a\sin\theta,\, -a\cos\theta)$。因此，车轮转动一周时，

$$x = a(\theta - \sin\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta), \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

在这段时间内，车轮向前移动了距离 $2\pi a$。




## 弧长

求导数，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = a(1-\cos\theta), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = a\sin\theta,$$

所以

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= a^2\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\\ &= 2a^2(1-\cos\theta)\\ &= 4a^2\sin^2\tfrac{\theta}{2},\end{aligned}$$

其中用到 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$。

> **想一想** 取平方根时，结果是 $2a\sin\frac{\theta}{2}$ 还是 $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$？在这里有没有分别？

平方根永远是 $2a\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$。当 $0 \le \theta \le 2\pi$ 时，我们有 $0 \le \frac{\theta}{2} \le \pi$，在这范围内 $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$，所以恰好转动一周时，绝对值（modulus）符号可以省去。（若范围更长，就必须把积分分段计算。）

因此，$P$ 所走的距离为

$$s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \Big[-4a\cos\tfrac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi} = -4a(-1) + 4a = 8a.$$

## 比值

车轮移动了 $2\pi a$，而轮缘上的点则走了 $8a$，所以所求的比值为

$$\frac{2\pi a}{8a} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785.$$

这个比值与车轮的大小无关，而这亦是理所当然的：把车轮放大或缩小，两段距离都会按相同的倍数改变。

## 验算

- 该点所走的距离比车轮的长（$8a > 2\pi a \approx 6.28a$），这是合理的：它既向前移动，同时又上升和下降各 $2a$。事实上，$8a$ 恰好是四条直径的长度。
- 一个粗略的估计：路径由 $(0,0)$ 上升至 $(\pi a, 2a)$，再下降至 $(2\pi a, 0)$，所以它的长度至少是 $2\sqrt{\pi^2 a^2 + 4a^2} \approx 7.45a$，而至多是 $2\pi a + 4a \approx 10.28a$。数值 $8a$ 正好落在两者之间。
- 以数值方法验证：在车轮滚动的过程中，追踪轮缘上的点的 200 000 个位置，再把各段直线距离相加，当 $a = 1$ 时得出 7.99999999992，所以比值是 $0.78539816\ldots = \pi/4$。

## 常见错误

- 把参数式（parametrisation）中的正负号弄错（例如 $x = a(\theta + \sin\theta)$），这样得出的路径相对于车轮是向后移动的。可在 $\theta = \pi$ 处检查：$P$ 应位于最高点 $(\pi a, 2a)$。
- 把被积函数（integrand）保留为 $a\sqrt{2 - 2\cos\theta}$，并试图直接积分；半角恒等式正是令积分变得容易的一步。
- 把比值上下颠倒：题目要求的是车轮所走的距离除以该点所走的距离，即 $\pi/4$，而不是 $4/\pi$。

## STEP 之外

摆线是数学中最著名的曲线之一。它是最速降线（brachistochrone），即在重力作用下，两点之间下降得最快的曲线；它也是等时降线（tautochrone），即珠子无论从曲线上哪一点出发，都会在相同时间内到达最低点。这两项事实都要用变分法（calculus of variations）来证明，你会在大学一年级或二年级的力学或数学方法课程中学到；而本题的弧长计算，正是两者的第一步。如想尝试更多同类的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。