详细解答

STEP III 1997，第 4 题

纯数学 · 算术几何平均不等式

STEP III 1997，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s3-q4

关键思路

题目原文有一处印刷错误：有四个根的多项式（polynomial）必定是四次多项式，而系数的规律 $1,4,6,4,1$ 告诉我们，题目原意的多项式是

$$\mathrm{f}(x) = x^4 - 4ax^3 + 6b^2x^2 - 4c^3x + d^4.$$

这样选取系数，是为了令 a, b^2, c^3, d^4 各自都是一个*平均值*：分别是各根的平均值、两两乘积的平均值、三三乘积的平均值，以及四个根全部相乘之积的平均值。之后每一个不等式，都是把算术平均—几何平均不等式（AM–GM inequality）应用于 f、f′ 或 f″ 的根而得出，而罗尔定理（Rolle's theorem）则确保这些根仍然是相异的正数。

解答

设 $\mathrm{f}(x) = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$。比较系数，得

$$p+q+r+s = 4a, \qquad pq+pr+ps+qr+qs+rs = 6b^2,$$
$$pqr+qrs+rsp+spq = 4c^3, \qquad pqrs = d^4.$$

第 (i) 部分

设 $P = pqrs = d^4$。由于没有一个根是零，

$$pqr = \frac{P}{s}, \quad qrs = \frac{P}{p}, \quad rsp = \frac{P}{q}, \quad spq = \frac{P}{r}.$$

映射 $t \mapsto P/t$ 在正实数上是一对一（one-to-one）的，而 p, q, r, s 互不相同，所以这四个乘积亦互不相同。

第 (ii) 部分

四个三三乘积是互不相同的正数，所以根据 AM–GM 不等式，

$$c^3 = \frac{pqr + qrs + rsp + spq}{4} > (pqr \cdot qrs \cdot rsp \cdot spq)^{1/4} = ((pqrs)^3)^{1/4} = (d^4)^{3/4} = d^3.$$

每个根都恰好出现在四个乘积的其中三个之中，因此它们的积是 $(pqrs)^3$。由于 $c, d > 0$，而 $t \mapsto t^3$ 是递增的，故由 $c^3 > d^3$ 可得 $c > d$。

第 (iii) 部分

把各根排序，使得 $0 < p < q < r < s$。多项式 f 可微（differentiable），并且在 p 和 q 处取值为零，所以根据罗尔定理，f′ 有一个根 α 满足 $p < \alpha < q$。同理，还有根 $\beta \in (q, r)$ 和 $\gamma \in (r, s)$。这些开区间（open interval）互不重叠，所以 $\alpha < \beta < \gamma$ 互不相同。由于 f′ 是三次多项式，它再没有其他根。还要留意，这三个根全是正数，因为 $\alpha > p > 0$。

第 (iv) 部分

求导，得

$$\mathrm{f}'(x) = 4x^3 - 12ax^2 + 12b^2x - 4c^3 = 4(x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3),$$

所以 α, β, γ 是 $x^3 - 3ax^2 + 3b^2x - c^3$ 的根，并且

$$\alpha + \beta + \gamma = 3a, \qquad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3b^2, \qquad \alpha\beta\gamma = c^3.$$

这是次数降低了一次的同一种规律，所以我们照搬第 (i) 和第 (ii) 部分的做法。两两乘积是 $\alpha\beta = c^3/\gamma$、$\beta\gamma = c^3/\alpha$、$\gamma\alpha = c^3/\beta$，由于 α, β, γ 是互不相同的正数，这些乘积亦互不相同。根据 AM–GM 不等式，

$$b^2 = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{3} > ((\alpha\beta\gamma)^2)^{1/3} = c^2,$$

又因为 $b, c > 0$，所以 $b > c$。

想一想 为甚么要先完成第 (iii) 部分，才可以对 f′ 使用 AM–GM?

AM–GM 不等式只适用于正实数，而且我们需要的是严格不等的版本。一个三次多项式根本不一定有三个实根。正是罗尔定理保证了 α, β, γ 是互不相同的正实数，因而两两乘积也是如此。

第 (v) 部分

把同样的论证再用一次。由于 f′ 有相异的根 $\alpha < \beta < \gamma$，根据罗尔定理，

$$\mathrm{f}''(x) = 12x^2 - 24ax + 12b^2 = 12(x^2 - 2ax + b^2),$$

有根 $\mu \in (\alpha, \beta)$ 和 $\nu \in (\beta, \gamma)$，而且这两个根是相异的正数。于是 $\mu + \nu = 2a$ 及 $\mu\nu = b^2$，再根据两个数的 AM–GM 不等式，

$$a = \frac{\mu + \nu}{2} > \sqrt{\mu\nu} = b.$$

（换一个说法：$x^2 - 2ax + b^2$ 有两个相异实根，所以它的判别式（discriminant）$4a^2 - 4b^2$ 是正数，而两者皆为正数，故 $a > b$。）综合以上各部分，我们证明了

$$a > b > c > d.$$

验算

- 取根为 $1, 2, 3, 4$：这时 $4a = 10$，$6b^2 = 35$，$4c^3 = 50$，$d^4 = 24$，所以 $a = 2.5$，$b \approx 2.415$，$c \approx 2.321$，$d \approx 2.213$，次序正确。
- 假如四个根全都等于 k，则 $\mathrm{f}(x) = (x - k)^4$ 而 $a = b = c = d = k$。这就是为甚么要有“根互不相同”这个条件，才能得到严格不等式。
- 我们随机测试了 20 000 组由四个相异正根组成的数据，当中包括几乎重合的根，每一次 $a > b > c > d$ 都成立。

常见错误

- 直接对 f 的根使用 AM–GM。这样可得 $a > d$，却无法分开中间的两项。
- 忘记检查代入 AM–GM 的数是否互不相同的正数，而这正是第 (i) 和第 (iii) 部分的用意所在。
- 由 $c^3 > d^3$ 或 $b^2 > c^2$ 推出 $c > d$ 或 $b > c$ 时，没有指出所有字母都代表正数。

STEP 之外

a, b, c, d 这些量是各根的*对称平均*（symmetric means），而不等式链 $a > b > c > d$ 是*麦克劳林不等式*（Maclaurin's inequality）的一个特殊情况：对于正实数，k 重乘积的平均值的 k 次方根，随 k 增加而递减。藉求导来降低次数、同时保持各平均值不变，这个技巧也是通往牛顿（Newton）不等式的标准途径。想了解更多，可参阅 Steele 的 *The Cauchy–Schwarz Master Class*（一本以柯西－施瓦茨不等式为主线的不等式专著），或哈代（Hardy）、李特尔伍德（Littlewood）与波利亚（Pólya）合著的经典 *Inequalities*（《不等式》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。