详细解答

STEP III 1997，第 3 题

纯数学 · 单位根

STEP III 1997，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s3-q3

关键思路

n 次单位根（roots of unity）$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ 正好是 $z^n - 1$ 的全部根，所以这个多项式（polynomial）可以完全因式分解（factorise）；除去因式 $z - 1$ 便得到第一个恒等式（identity）。把多边形放在复平面（complex plane）上，以 O 为原点，各顶点就是 $re^{i\theta}$ 乘以各个单位根。这样，向量和就是一个等比级数（geometric series），而弦长的平方则可用点积（dot product）展开 $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2$ 而得。

解答

乘积恒等式

对 $k = 0, 1, \ldots, n-1$，我们有 $(\omega^k)^n = e^{2\pi i k} = 1$，所以每个 ω^k 都是 $z^n - 1 = 0$ 的根。这 n 个数互不相同，因为它们的辐角（argument）$2\pi k/n$ 互不相同，而且全部位于 $[0, 2\pi)$ 之内。一个 n 次多项式，若首项系数（leading coefficient）为 1 并有 n 个相异的根，就等于相应的一次因式之积，所以

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

另一方面，由等比级数求和（或者直接乘开），

$$z^n - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}).$$

对每个 $z \neq 1$，我们可以把两个式子同除以 $z - 1$，得出

$$(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \qquad (z \neq 1).$$

想一想 题目说的是“任意复数 z”。那么 $z=1$ 又如何？这时我们不能做除法。

两边都是 $n-1$ 次多项式，而它们在无穷多个点 $z\neq 1$ 上相等。于是两者之差是一个有无穷多个根的多项式，所以它是零多项式（zero polynomial）。（另一个做法：两边都是 z 的连续（continuous）函数，所以令 $z\to 1$ 即可。）因此，恒等式对每个复数 z 都成立，包括 $z=1$，这正是所要证明的。

向量和

把圆所在的平面视为复平面，以 O 为原点，并以 a_k 表示代表 A_k 的复数。若 $a_1=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则把各顶点按逆时针方向依次标记（相邻两个顶点在 O 所对的角为 $2\pi/n$），便有

$$a_k=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\omega^{k-1},\qquad k=1,2,\ldots,n.$$

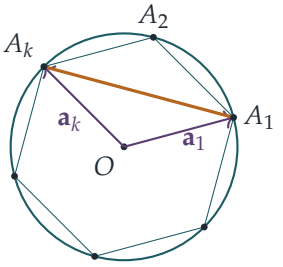
（若改为按顺时针方向标记，只不过是把 ω 换成 $\bar{\omega}=\omega^{n-1}$，而它所遍历的仍是同一组单位根；况且这个和本来就与顶点的次序无关。）

向量 $\overrightarrow{OA_k}$ 对应复数 a_k，而向量相加对应复数相加。所以我们要求的是

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}\right).$$

括号内的式子就是恒等式右边在 $z=\omega$ 时的值。由于 ω 出现在左边的因式之中（当 $n\geq 2$ 时），左边含有因式 $\omega-\omega=0$，所以括号内的值为 0。（同样地，它是一个公比（common ratio）为 $\omega\neq 1$ 的等比级数，所以等于 $(\omega^n-1)/(\omega-1)=0$。）因此

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\mathbf{0}.$$



距离平方之和

现在把 $\mathbf{a}_k = \overrightarrow{OA_k}$ 写成向量，于是对每个 k 都有 $|\mathbf{a}_k| = r$，并且 $\overrightarrow{A_1A_k} = \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1$。用点积展开，

$$\begin{aligned} |A_1A_k|^2 &= (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1)\cdot(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1) \\ &= |\mathbf{a}_k|^2 + |\mathbf{a}_1|^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k \\ &= 2r^2 - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k. \end{aligned}$$

这对 $k = 1$ 也成立，此时两边都是 0。对 $k = 1, \ldots, n$ 求和，并利用点积对加法的分配律，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |A_1A_k|^2 &= 2r^2n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k\right) \\ &= 2r^2n - 2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{0} = 2r^2n, \end{aligned}$$

这里用了上一部分的结果。这就是所要证明的结果。

验算

- $n = 2$：恒等式变成 $z - (-1) = 1 + z$。两点是一条直径的两端，所以和为 $0 + (2r)^2 = 4r^2 = 2r^2\cdot 2$。
- $n = 4$，$r = 1$：由正方形的一个角出发，各距离的平方为 $0, 2, 4, 2$，总和为 $8 = 2\cdot 1^2\cdot 4$。
- 数值上，随机选取 2000 组 $n \le 20$、半径和旋转角度，向量和均为零，弦长平方之和与 $2r^2n$ 的误差在 10^{-14} 以内；乘积恒等式也在随机的 z（以及 $z = 1$）上验证过，准确度相同。

常见错误

- 除以 $z - 1$ 之后，忘记了这样只证明了恒等式在 $z \neq 1$ 时成立。
- 写成 $|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_1|^2 = |\mathbf{a}_k|^2 - |\mathbf{a}_1|^2$：交叉项 $-2\,\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_k$ 正是整个论证的关键。

STEP 之外

在乘积恒等式中代入 $z = 1$ 并取模（modulus），可得 $|1-\omega|\,|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}| = n$：单位圆的内接正 n 边形中，由一个顶点出发的各条弦长之积恰好是 n，与本题的平方和相映成趣。把 $z^n - 1$ 按单位根因式分解，是分圆多项式（cyclotomic polynomials）和离散傅里叶变换（discrete Fourier transform）的起点，两者都会在大学课程的早期遇到。

Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以图像方式讲解复分析）是一本优美的书，很适合用来见识这类以复数处理的几何。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。