详细解答

STEP III 1997，第 2 题

纯数学 · 曲线描绘

> **STEP III 1997，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q2

关键思路

取对数（logarithm）后，$x^y = y^x$ 变成 $y\ln x = x\ln y$，再除以 xy 便得 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$。所以题目的后半其实是在问前半的事：只要知道 f 的每个输出值对应多少个输入值，就知道每个 x 有多少个“拍档” y。这条方程总有一个明显的解 $y = x$；有趣的是另外那一个。

解答

f 的图像

用商法则（quotient rule）求导，

$$\mathrm{f}'(t) = \frac{t\cdot\frac{1}{t} - \ln t}{t^2} = \frac{1-\ln t}{t^2}, \qquad \mathrm{f}''(t) = \frac{2\ln t - 3}{t^3}.$$

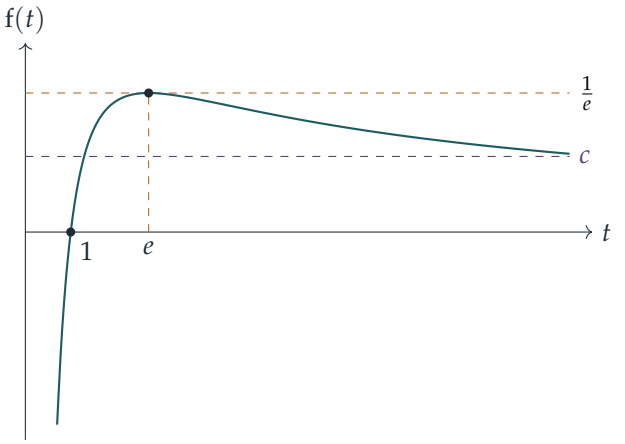
所以当 $0 < t < e$ 时 $\mathrm{f}'(t) > 0$，当 $t > e$ 时 $\mathrm{f}'(t) < 0$：f 在 $(0, e]$ 上严格递增（strictly increasing），在 $[e, \infty)$ 上严格递减（strictly decreasing）。极大值为

$$\mathrm{f}(e) = \frac{1}{e}.$$

草图还需要的其他特征：

- 当 $0 < t < 1$ 时 $\mathrm{f}(t) < 0$，$\mathrm{f}(1) = 0$，而当 $t > 1$ 时 $\mathrm{f}(t) > 0$。
- 当 $t \to 0^+$ 时，$\ln t \to -\infty$ 而 $1/t \to +\infty$，所以 $\mathrm{f}(t) \to -\infty$：$y$-轴是一条渐近线（asymptote）。
- 当 $t \to \infty$ 时，$\mathrm{f}(t) \to 0^+$，因为 $\ln t$ 的增长比 t 慢。所以 t-轴是一条渐近线。

- 在 $t = e^{3/2}$ 处有一个拐点（point of inflection），该处 $\mathrm{f} = \frac{3}{2}e^{-3/2} \approx 0.33$。计数解的数目时用不着它，但有了它，草图才算如实。



有多少个 t 给出数值 c?

由于 f 在 $(0, e]$ 和 $[e, \infty)$ 上各自连续（continuous）且严格单调（strictly monotonic），每一段对它取得到的任何值都恰好取一次。在 $(0, e]$ 上，f 由 $-\infty$ 递增至 $\frac{1}{e}$；在 $[e, \infty)$ 上，它由 $\frac{1}{e}$ 向 0 递减，但永远不会达到这个值。因此，对给定的数值 c：

- $c > \frac{1}{e}$：**没有** t 值；
- $c = \frac{1}{e}$：**一个**值，$t = e$；
- $0 < c < \frac{1}{e}$：**两个**值，一个在 $(1, e)$ 内，一个在 (e, ∞) 内（即草图中的水平线 c）；
- $c \leq 0$：**一个**值，在 $(0, 1]$ 内，因为递减的那一支始终严格为正。

计数 $x^y = y^x$ 的解

对 $x, y > 0$，两边皆为正数，所以可以取对数；ln 是一对一（one-to-one）的，所以既不会多出解，也不会遗漏解：

$$x^y = y^x \iff y \ln x = x \ln y \iff \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \iff \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(x),$$

其中我们除以了 $xy > 0$。所以，对固定的 x，正数 y 的数目就是满足 $\mathrm{f}(t) = c$ 的 t 的数目，其中 $c = \mathrm{f}(x)$。其中一个必定是 $y = x$。

? **想一想** $c = \mathrm{f}(x)$ 实际上可以落入上述四种情况中的哪几种?

由于 c 是 f 的一个值，$c > \frac{1}{e}$ 这种情况不可能出现。把其余情况转换回关于 x 的条件：

- $0 < x \leq 1$：这时 $c = \mathrm{f}(x) \leq 0$，所以恰好有一**个** y，就是 $y = x$。
- $x = e$：这时 $c = \frac{1}{e}$，所以恰好有一**个** y，就是 $y = e$。
- $1 < x < e$ 或 $x > e$：这时 $0 < c < \frac{1}{e}$，所以恰好有**两个** y 值：$y = x$ 和另外一个。若 $1 < x < e$，另外那个位于 (e, ∞) 内；若 $x > e$，它位于 $(1, e)$ 内。

例如，$x = 2$ 的拍档是 $y = 4$，因为 $2^4 = 4^2 = 16$。

描绘解集

解集由直线 $y = x$（对所有 $x > 0$）和第二条曲线组成；第二条曲线由那些“另外的”解构成，完全位于 $x > 1, y > 1$ 的区域内。它的形状如下：

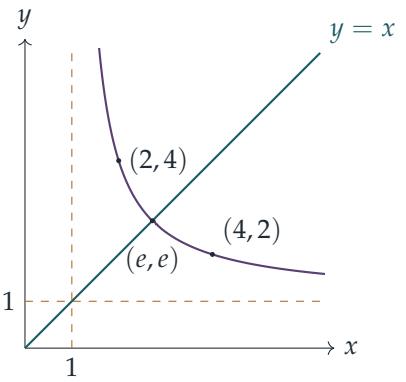
- 对称性。把 x 和 y 对调，方程不变，所以曲线关于直线 $y = x$ 对称。
- 递减。当 x 在 $(1, e)$ 内增大时，$\mathrm{f}(x)$ 增大，所以拍档 $y > e$ 必须移向 f 较大之处，即 y 减小。$x > e$ 时同理。所以在这一支上，y 是 x 的递减函数。
- 渐近线。当 $x \to 1^+$ 时，$\mathrm{f}(x) \to 0^+$，所以拍档 $y \to \infty$：直线 $x = 1$ 是一条渐近线。由对称性，当 $x \to \infty$ 时，$y \to 1^+$，故 $y = 1$ 也是一条渐近线。
- 与直线 $y = x$ 相交。当 $x \to e$ 时，拍档也趋向 e，所以曲线经过 (e, e)，并在该处穿过直线。在 $t = e$ 附近，利用 $\mathrm{f}'(e) = 0$ 和 $\mathrm{f}''(e) = -e^{-3}$，由泰勒定理（Taylor's theorem）得 $\mathrm{f}(t) \approx \frac{1}{e} - \frac{(t-e)^2}{2e^3}$。所以 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y)$ 迫使 $(y-e)^2 \approx (x-e)^2$，即 $y - e \approx \pm(x-e)$。取正号就是直线 $y = x$。取负号就是我们的曲线，因此它与直线成直角相交，斜率（gradient）为 -1。

想一想 我们能否把这条曲线明确地写出来?

可以，只要用两者之比作参数化（parametrise）。设 $y = tx$，其中 $t > 0, t \neq 1$。那么 $x^{tx} = (tx)^x$；两边开 x 次方得 $x^t = tx$，所以 $x^{t-1} = t$，于是

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

在 $t = 2$ 时得到 $(2, 4)$，在 $t = \frac{1}{2}$ 时得到 $(4, 2)$。当 $t \to 1$ 时，两个坐标都趋向 e，因为 $t^{1/(t-1)} \to e$。下图的曲线就是这样画出来的。



验算

- $2^4 = 4^2$ 是著名的整数例子，它确实落在曲线上，并如所料分别位于 $1 < x < e$ 和 $x > e$ 之内。
- 数值上，用细密的网格搜索，得出 f 的极大值位于 $t \approx 2.718$，其值为 $0.367879 \approx 1/e$。用二分法（bisection）求得 $x = 1.01$ 的拍档为 $y \approx 659$，而 $x = 100$ 的拍档为 $y \approx 1.050$。这些结果与渐近线 $x = 1$ 和 $y = 1$ 吻合。
- 在 $x = e$ 处用中心差分（central difference），得出第二支的斜率为 -1.0000。

常见错误

- 说每个 $x \neq e$ 都有两个拍档。对 $0 < x \leq 1$，$\mathrm{f}(x)$ 的值并非正数，只有 $y = x$ 成立。
- 在最后的草图中漏画直线 $y = x$，或者把另一支画成在 (e, e) 处与直线相切，而不是穿过直线。
- 除以 $\ln x$ 或 $\ln y$（它们可能为零），而不是除以 xy。

STEP 之外

第二条曲线是 $\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(y)$ 的一个水平集（level set），而 (e, e) 正是该函数的梯度为零的一点。这就是为何在该处有两支曲线相交，而不是只有一条光滑曲线经过。大学一年级分析课程中会遇到的隐函数定理（implicit function theorem），解释了水平集何时在局部上是一个图像，以及不是的时候会发生甚么事。Abbott 的 *Understanding Analysis* 是打好基础的入门好书。方程 $x^y = y^x$ 本身历史悠久；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 中还有更多同类风格的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。