详细解答

STEP III 1997，第 14 题

概率与统计 · 随机变量的乘积

STEP III 1997，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s3-q14

关键思路

周界是长度与阔度的线性函数，因此它的平均值和方差可直接由独立变量之和的法则得出。面积则是一个乘积，而对于独立变量，乘积的期望值等于期望值的乘积；把这一点应用于 LB 和 L^2B^2，便得到平均值和方差。要证明两者并非独立，最干净利落的做法是找出一个非零的协方差（covariance），因为独立变量的协方差必定为零。

解答

设 L 和 B 分别为随机抽出的一块板的长度和阔度，则 L 与 B 独立（independent），且

$$\mathrm{E}(L) = \mu_1, \quad \mathrm{Var}(L) = \sigma_1^2, \qquad \mathrm{E}(B) = \mu_2, \quad \mathrm{Var}(B) = \sigma_2^2.$$

设 $P = 2(L + B)$ 为周界，$A = LB$ 为面积。我们会多次用到 $\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + [\mathrm{E}(X)]^2$，从而有 $\mathrm{E}(L^2) = \mu_1^2 + \sigma_1^2$ 及 $\mathrm{E}(B^2) = \mu_2^2 + \sigma_2^2$。

周界

由期望值的线性性质（linearity of expectation），

$$\mathrm{E}(P) = 2(\mu_1 + \mu_2).$$

由于 L 与 B 独立，两者之和的方差（variance）等于各自方差之和，所以

$$\mathrm{Var}(P) = 2^2(\mathrm{Var}(L) + \mathrm{Var}(B)) = 4(\sigma_1^2 + \sigma_2^2), \qquad \text{标准差}(P) = 2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

面积

因为 L 与 B 独立，$\mathrm{E}(LB) = \mathrm{E}(L)\,\mathrm{E}(B)$，所以

$$\mathrm{E}(A) = \mu_1\mu_2.$$

要求方差，我们需要 $\mathrm{E}(A^2) = \mathrm{E}(L^2B^2)$。

> **想一想** 我们还可以把 $\mathrm{E}(L^2B^2)$ 拆成乘积吗?

可以：独立变量的函数仍然互相独立，所以 L^2 与 B^2 独立，而 $\mathrm{E}(L^2B^2) = \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2)$。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(A) &= \mathrm{E}(L^2)\,\mathrm{E}(B^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= (\mu_1^2+\sigma_1^2)(\mu_2^2+\sigma_2^2) - \mu_1^2\mu_2^2\\ &= \sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2,\end{aligned}$$

以及

$$\text{标准差}(A) = \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 + \mu_2^2\sigma_1^2}.$$

留意乘积的方差并非只是 $\sigma_1^2\sigma_2^2$：每一个维度上的离散程度，都会被另一个维度的典型大小放大。

周界与面积并非独立

假如 P 与 A 独立，便会有 $\mathrm{E}(PA) = \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)$，即 $\mathrm{Cov}(P,A) = 0$。我们来计算协方差。首先，

$$\mathrm{E}(PA) = 2\,\mathrm{E}(L^2B) + 2\,\mathrm{E}(LB^2).$$

再次利用独立性（这次是 L^2 与 B 独立，以及 L 与 B^2 独立），

$$\mathrm{E}(L^2B) = (\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2, \qquad \mathrm{E}(LB^2) = \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2).$$

故此

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(P,A) &= \mathrm{E}(PA) - \mathrm{E}(P)\,\mathrm{E}(A)\\ &= 2[(\mu_1^2+\sigma_1^2)\mu_2 + \mu_1(\mu_2^2+\sigma_2^2)] - 2(\mu_1+\mu_2)\mu_1\mu_2\\ &= 2(\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2).\end{aligned}$$

长度和阔度都是正数，所以 $\mu_1 > 0$ 及 $\mu_2 > 0$；题目已知标准差（standard deviation）不为零，所以 $\sigma_1^2 > 0$ 及 $\sigma_2^2 > 0$。于是 $\mathrm{Cov}(P,A) > 0$。

由于独立变量的协方差为零，P 与 A 不可能独立。这是合理的：一块板若在任何一个方向上比平均大，它的周界和面积往往都会较大。

想一想 假如算出来的协方差是零，这能否说明 P 与 A 独立?

不能。这个推论只是单向的：独立必然导致协方差为零，但协方差为零并不保证独立。所以非零的协方差能证明两者相依，这正是我们现在的情况；若协方差为零，则甚么结论也得不到。

验算

- 取 L 与 B 独立，各自以概率 $\frac{1}{2}$ 取值 1 或 3。则 $\mu_i = 2$, $\sigma_i^2 = 1$，而公式给出 $\mathrm{Cov}(P, A) = 2(2+2) = 8$，与直接列举四块等可能的板所得的结果一致。两者相依亦可直接看出：$\mathrm{P}(P = 4) = \mathrm{P}(A = 1) = \frac{1}{4}$，但 $\mathrm{P}(P = 4 \text{ 且 } A = 1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{16}$，因为两个事件都表示 $L = B = 1$。
- 以 $\mu_1 = 5$、$\mu_2 = 3$、$\sigma_1 = 0.7$、$\sigma_2 = 0.4$ 进行模拟，得到 标准差$(A) \approx 2.919$，而公式给出 2.913；又得到 $\mathrm{Cov}(P, A) \approx 4.56$，而公式给出 4.54。
- 若 $\sigma_2 \to 0$（阔度固定为 μ_2），则 标准差$(A) \to \mu_2\sigma_1$，这正是 $A = \mu_2 L$ 时应有的结果。

常见错误

- 写成 $\mathrm{Var}(LB) = \sigma_1^2\sigma_2^2$，或写成 $\mathrm{Var}(LB) = \mathrm{Var}(L)\mathrm{Var}(B) + \ldots$ 而漏掉了某些项；务必经由 $\mathrm{E}(L^2B^2)$ 来计算。
- 计算 $\mathrm{Var}(2(L+B))$ 时忘记把因子 2 平方。
- 以“因为两者都取决于 L 和 B”为理由，断言 P 与 A 相依。这只是直觉，不是证明；真正能下定论的，是协方差的计算（或一个概率不相等的具体例子）。

STEP 之外

不相关（uncorrelated）与独立的随机变量（random variable）之间的分别，是大学一年级概率课程的核心：独立意味着联合分布（joint distribution）可以分解成乘积，这比单单一个矩（moment）的条件强得多。$\mathrm{Var}(LB)$ 的计算，也是实验科学中广泛使用的“误差传递”（propagation of errors）公式的起点。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教科书）对独立性、协方差及随机变量的乘积有严谨细致的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。