详细解答

STEP III 1997，第 13 题

概率与统计 · 正态分布的矩生成函数

> **STEP III 1997，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q13

关键思路

一切都建基于一个积分：标准正态分布（standard normal distribution）的矩母函数（moment generating function，简称 mgf），只要把指数部分配方（completing the square）便可求得。之后，独立性（independence）把和的矩母函数化为乘积，而矩母函数的唯一性则让我们可以直接读出分布。最后一部分其实是同一个计算换了个面貌：$Z = \mathrm{e}^{\mu+\sigma X}$ 的幂，不过是 X 的某个倍数的指数函数而已。

解答

第 (i) 部分

设 $M(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$。则

$$M(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-2\theta x)}\,\mathrm{d}x.$$

配方得 $x^2 - 2\theta x = (x-\theta)^2 - \theta^2$，所以

$$M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u,$$

其中用了代换 $u = x - \theta$。最后一个积分是标准正态概率密度函数（density）在整条实数线上的积分，其值为 1。因此，对任意实数 θ，

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}.}$$

第 (ii) 部分

由于 X 与 Y 独立，$\mathrm{e}^{\theta aX}$ 与 $\mathrm{e}^{\theta bY}$ 亦独立，而独立随机变量（random variable）之积的期望值（expectation），等于各自期望值之积。把第 (i) 部分的 θ 分别换成 $a\theta$ 和 $b\theta$（并利用 Y 与 X 分布相同这一事实），可得

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta(aX+bY)}) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{a\theta X})\,\mathrm{E}(\mathrm{e}^{b\theta Y}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2\theta^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}b^2\theta^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2}.$$

? **想一想** 为甚么矩母函数相同，就足以断定分布相同?

若矩母函数对 0 附近的所有 θ 都存在，它便唯一地决定了分布。所以，$aX+bY$ 与 X 分布相同，当且仅当其矩母函数对所有 θ 都等于 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}$，即

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\theta^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2} \quad \text{对所有}\theta.$$

取对数，并任选一个 $\theta \neq 0$，可知上式成立当且仅当

$$\boxed{a^2+b^2=1.}$$

（“仅当”这个方向不用唯一性也显而易见：$\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2+b^2$ 必须等于 $\mathrm{Var}(X) = 1$。）一般而言，$aX+bY$ 服从平均值（mean）为 0、方差（variance）为 a^2+b^2 的正态分布；例如 $(X+Y)/\sqrt{2}$ 仍然是标准正态。

第 (iii) 部分

对任意实数 θ，

$$Z^\theta = (\mathrm{e}^{\mu+\sigma X})^\theta = \mathrm{e}^{\mu\theta}\,\mathrm{e}^{(\sigma\theta)X},$$

而 $\mathrm{e}^{\mu\theta}$ 是常数，所以把第 (i) 部分的 θ 换成 $\sigma\theta$，便得

$$\mathrm{E}(Z^\theta) = \mathrm{e}^{\mu\theta}\,\mathrm{E}(\mathrm{e}^{(\sigma\theta)X}) = \mathrm{e}^{\mu\theta}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} = \mathrm{e}^{\mu\theta+\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2},$$

这正是所要证明的结果。

取 $\theta = 1$ 便得平均值：

$$\boxed{\mathrm{E}(Z) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}.}$$

取 $\theta = 2$ 得 $\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2}$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{E}(Z^2) - (\mathrm{E}(Z))^2 = \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2} - \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} \\ &= \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1).\end{aligned}$$

验算

- 对 $M(\theta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2}$ 求导，得 $M'(0) = 0$ 及 $M''(0) = 1$：平均值为 0，方差为 1，与应有的结果一致。
- 若 $\sigma = 0$，则 $Z = \mathrm{e}^{\mu}$ 是常数；我们的公式给出平均值 e^{μ} 和方差 0。
- 数值上，取 $\mu = 0.3$ 和 $\sigma = 0.5$，对正态密度函数积分，得 $\mathrm{E}(Z) \approx 1.5296$ 及 $\mathrm{Var}(Z) \approx 0.6645$，与 $\mathrm{e}^{0.425}$ 和 $\mathrm{e}^{0.85}(\mathrm{e}^{0.25} - 1)$ 吻合。对 $0.6X + 0.8Y$ 进行模拟，所得样本方差为 1.000。

常见错误

- 以“代入 X 的平均值”的方式写出 $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{e}^{\mu}$。一般而言 $\mathrm{E}(g(X)) \neq g(\mathrm{E}(X))$，而这里指数函数的凸性（convexity）令平均值增大至 $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2}$ 倍。
- 把条件写成 $a + b = 1$：相加的是方差，而不是系数。

STEP 之外

随机变量 Z 服从对数正态（log-normal）分布；凡是由许多细小的随机因子连乘而增长的量，都以它为标准模型，例如布莱克–舒尔斯（Black–Scholes）模型中的股价。第 (ii) 部分让我们窥见一个引人注目的事实：在方差有限的分布之中，基本上只有正态分布在适当缩放后求和，仍然留在同一个分布族内，而这与中心极限定理（central limit theorem）息息相关。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）正好以这个程度讲解矩母函数、正态分布和中心极限定理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。