详细解答

# STEP III 1997，第 11 题

力学 • 刚体转动

**STEP III 1997，第 11 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s3-q11

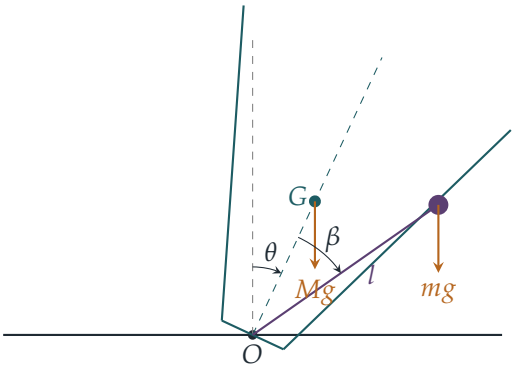
## 关键思路

只要钟与钟锤保持接触，两者便以相同的角速度（angular velocity）绕同一点 $O$ 转动，因此唯一能令它们分开的，就是角加速度（angular acceleration）的差异。不妨问：两者各自独立运动时，加速有多快？当自由摆动的钟的角加速度刚好等于自由钟锤的角加速度时，钟锤与钟便在那一瞬间分离。此时接触力恰好为零，而角速度从头到尾都没有出现。

## 解答

**模型**。钟是一个刚体（rigid body），可绕通过 $O$ 的水平轴自由转动，对该轴的转动惯量（moment of inertia）为 $Mk^2$。钟锤是一个质量为 $m$ 的质点（particle），装在长度为 $l$ 的轻质刚杆上，同样以 $O$ 为枢轴。枢轴光滑，且没有空气阻力。所有角度均由向上的铅垂线量起，以钟锤相对于钟轴所在的一侧为正方向。设 $\theta$ 为钟轴 $OG$ 的角度。两者接触期间，钟锤的杆与钟轴一直保持夹角 $\beta$，所以杆的角度是 $\theta + \beta$。

在钟内，钟锤的球靠在内壁上，所靠的正是它本身会倒下去的那一侧。因此内壁把球向后推（朝角度较小的方向），而根据牛顿第三定律（Newton's third law），球则把钟向前推。设 $\Gamma \geq 0$ 为这个接触力（包括任何摩擦力）对 $O$ 的力矩（moment）。它对钟锤的作用是 $-\Gamma$，对钟的作用是 $+\Gamma$。




**接触期间的运动方程**。分别对每个物体取对 $O$ 的力矩（枢轴处的反作用力和杆中的张力对 $O$ 均无力矩）：

$$\text{钟锤：}\quad ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin(\theta+\beta) - \Gamma,$$
$$\text{钟：}\quad Mk^2\ddot{\theta} = Mgh\sin\theta + \Gamma.$$

重量 $mg$ 的作用点与 $O$ 相距 $l$，所在的直线与铅垂线成角 $\theta+\beta$，所以它的力矩是 $mgl\sin(\theta+\beta)$；作用于 $G$ 的 $Mg$ 亦同理。两个物体一起运动，所以有相同的 $\ddot{\theta}$。

把两式相加，便可消去 $\Gamma$：

$$\ddot{\theta} = \frac{g(ml\sin(\theta+\beta) + Mh\sin\theta)}{ml^2 + Mk^2}.$$

代回钟锤的方程并化简，得

$$\Gamma = \frac{mMgl}{ml^2+Mk^2}\Big(k^2\sin(\theta+\beta) - hl\sin\theta\Big).$$

释放时 $\theta = 0$，而 $\Gamma = \dfrac{mMglk^2\sin\beta}{ml^2+Mk^2} > 0$，所以钟锤起初确实压在钟上，正如所料。

**想一想** 为甚么不论角速度是多少，分离都恰好在 $\Gamma$ 降至零的时候发生?

接触只能推、不能拉，所以必须有 $\Gamma \geq 0$。当 $\Gamma > 0$ 时，自由的钟锤会比钟加速得更快，所以它被压在内壁上，两者一起运动。由于两者以相同的角速度绕同一点 $O$ 转动，球与内壁之间的空隙只能因角加速度不同而出现。一旦 $\Gamma$ 要变为负值，钟本身的角加速度 $gh\sin\theta/k^2$ 便超过钟锤的 $g\sin(\theta+\beta)/l$，内壁于是摆离球。所以分离发生在第一个令 $\Gamma = 0$ 的 $\theta$。（在 $\theta = \pi$ 之前必定存在这样的 $\theta$，因为括号内的式子在 $\theta = 0$ 时是 $k^2\sin\beta > 0$，在 $\theta = \pi$ 时是 $-k^2\sin\beta < 0$。）

**分离时的角度**。设 $\alpha = \theta + \beta$，即分离时钟锤的杆与向上铅垂线所成的角。于是由 $\Gamma = 0$ 得

$$k^2\sin\alpha = hl\sin(\alpha-\beta) = hl(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta).$$

这里 $0 < \alpha < \pi$，所以 $\sin\alpha \neq 0$，而且 $\sin\beta \neq 0$。两边除以 $hl\sin\alpha\sin\beta$：

$$\frac{k^2}{hl\sin\beta} = \cot\beta - \cot\alpha,$$

即

$$\cot\alpha = \cot\beta - \frac{k^2}{hl}\operatorname{cosec}\beta,$$

这正是所求的结果。留意两个质量都没有出现。

## 验算

- 短钟锤。当 $l \to 0$ 时，修正项趋向无穷大，所以 $\cot\alpha \to -\infty$，$\alpha \to \pi$。这很合理：短的摆有很大的自由角加速度 $g\sin\alpha/l$，所以装在极短杆上的钟锤会一直推着钟，直至 $\sin\alpha$ 接近零，即直至两者几乎倒转为止。
- 等价形式。这个条件其实就是 $\dfrac{g\sin\alpha}{l} = \dfrac{gh\sin(\alpha-\beta)}{k^2}$：自由的钟锤与自由的钟有相等的角加速度。
- 数值验证。取 $k = 1$、$h = 0.6$、$l = 0.8$ 及 $\beta = 30°$，公式给出 $\cot\alpha = \sqrt{3} - 25/6 \approx -2.43$，所以 $\alpha \approx 157.7°$。由释放一刻起对合并运动逐步作数值积分，到 $\Gamma$ 首次降至零时停止，所得的角度与此相同，准确至小数点后多个位，而且 $M/m = 5$ 与 $M/m = 500$ 的情况皆然。

## 常见错误

- 用能量守恒（conservation of energy）求出 $\dot\theta$，然后试图由圆周运动求“法向反作用力”。角速度是两个物体共有的，对它们是否分离毫无影响。
- 由钟轴而不是由向上的铅垂线量度 $\alpha$。在整段接触期间，杆与钟轴的夹角都是 $\beta$，所以 $\alpha = \theta + \beta$。
- 忘记 $Mk^2$ 是对 $O$ 而不是对 $G$ 的转动惯量。这里无须用平行轴定理（parallel-axis theorem）作修正。

## STEP 之外

要找出约束（constraint）何时失效，有一个通用的原则，而本题正是一个简洁的例子：先解出受约束的运动，再计算约束力，然后找出它在何处变号。拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）利用拉格朗日乘数（Lagrange multipliers）把这个做法系统化，而这些乘数原来就是约束力。同样的想法可以处理质点离开球面这个经典问题。Kleppner 与 Kolenkow

合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）涵盖刚体绕固定轴的转动，是极佳的预备读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。