详细解答

STEP III 1997，第 10 题

力学 · 有滑动的滚动

STEP III 1997，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s3-q10

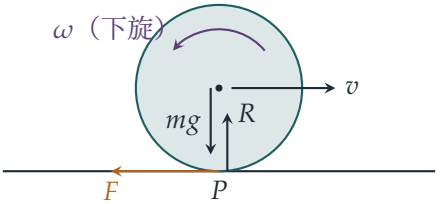
本题在 *Beyond STEP* 第 11.6 节*后旋*中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/backspin.html

关键思路

关键在于弹珠的底部是否正在桌面上滑动。只要它在滑动，摩擦力（friction）的大小和方向都固定不变，因此线运动和角运动都是匀减速的，可以准确地写出来。当接触点相对于桌面静止时，滑动便告结束，此后弹珠作滚动，完全不受摩擦力。所以整道题目问的就是哪一件事最先发生：$v = 0$、$\omega = 0$，还是滑动速度（slip velocity）降至零。

解答

模型。 弹珠是质量为 m、半径为 a 的均匀实心球，所以它对直径的转动惯量（moment of inertia）为 $I = \frac{2}{5}ma^2$。取 v 为球心的速度（以 v_0 的方向为正），ω 为*向后*转动方向的角速度（angular velocity）（下旋（backspin）为正），于是 $v(0) = v_0 > 0$ 及 $\omega(0) = \omega_0 > 0$。手指只负责令弹珠开始运动；其后作用于弹珠的力只有重量 mg、法向反作用力（normal reaction）$R = mg$ 以及接触点 P 处的摩擦力 F。



在下旋的情况下，弹珠底部相对于球心以速率 $a\omega$ 向前运动，所以接触点的速度为

$$s = v + a\omega.$$

起初 $s = v_0 + a\omega_0 > 0$：弹珠在桌面上向前打滑，所以摩擦力向后作用，大小恒为 F。记 $F = mk$。

滑动期间的运动方程。 沿水平方向分解，得 $m\dot{v} = -F$。对球心取力矩（moment），底部向后的摩擦力会使弹珠朝向前滚动的方向转动，因此它会减弱下旋：

$$\tfrac{2}{5}ma^2\,\dot{\omega} = -Fa \quad\Longrightarrow\quad \dot{\omega} = -\frac{5k}{2a}.$$

两者皆为常数，所以只要弹珠继续向前滑动，

$$v = v_0 - kt, \qquad a\omega = a\omega_0 - \tfrac{5}{2}kt, \qquad s = v_0 + a\omega_0 - \tfrac{7}{2}kt.$$

因此滑动速度降至零的时刻为

$$t_1 = \frac{2(v_0 + a\omega_0)}{7k},$$

而在此之前摩擦力的方向一直不变，所以这些公式在整个区间 $0 \le t \le t_1$ 上都成立，即使 v 或 ω 在途中改变了符号亦然。

> ? **想一想** 在 $t = t_1$ 时会发生甚么事？为甚么弹珠不会随即向相反方向滑动？

在 t_1 时接触点静止，所以 $v = -a\omega$：弹珠正在滚动。假如它继续以恒定速率滚动，便不需要任何力去推动它，所以摩擦力（一旦没有滑动，它只需要有多大便有多大）为零，而以恒定速度滚动与所有方程都相容。因此由 t_1 起，弹珠作匀速滚动，速度为

$$V = v(t_1) = v_0 - \tfrac{2}{7}(v_0 + a\omega_0) = \frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7}.$$

第 (i) 部分

要弹珠最终完全静止，最后的滚动速度必须为零：$V = 0$，所以 $5v_0 = 2a\omega_0$，即

$$\frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{2}{5}.$$

检查一下这个情景是否合理：取这个比值时，$v = 0$ 发生于 $t = v_0/k$，而 $\omega = 0$ 发生于 $t = 2a\omega_0/(5k) = v_0/k$，是同一时刻，而这亦正是 t_1。所以线运动和角运动在弹珠仍在滑动时一同消失，此后弹珠保持静止（没有滑动，也没有摩擦力）。

第 (ii) 部分

现在弹珠最终必须以速率 $v_0/7$ 向后滚动，所以 $V = -v_0/7$：

$$\frac{5v_0 - 2a\omega_0}{7} = -\frac{v_0}{7} \quad\Longrightarrow\quad 6v_0 = 2a\omega_0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{v_0}{a\omega_0} = \frac{1}{3}.$$

取这个比值时，v 在 $t = v_0/k$ 时降至零，这早于 $t_1 = 2(v_0 + 3v_0)/(7k) = 8v_0/(7k)$。在那一瞬间弹珠暂时不动，但仍带有下旋 $\omega = \omega_0 - \frac{5v_0}{2a} = \frac{v_0}{2a} > 0$，所以底部仍在向前打滑，摩擦力继续把它往后拉。在 t_1 时我们得到 $v = -v_0/7$ 及 $a\omega = v_0/7$，所以它以速率 $v_0/7$ 朝起点滚回去，符合要求。

> ? **想一想** 有没有更快捷的方法，毋须解出 t_1 便可求得 V?

有。在桌面上沿运动路线取一个固定点 O，考虑对该点的角动量（angular momentum）。摩擦力沿桌面作用，所以它对 O 没有力矩，而 R 与 mg 的力矩互相抵消。以向前滚动的方向为正，对 O 的角动量等于 mva（球心位于高度 a 处）减去自旋部分 $\frac{2}{5}ma^2\omega$，所以这个量守恒：

$$mv_0a - \tfrac{2}{5}ma^2\omega_0 = maV + \tfrac{2}{5}ma^2 \cdot \frac{V}{a} = \tfrac{7}{5}maV,$$

再次得出 $V = (5v_0 - 2a\omega_0)/7$。

验算

- 没有旋转（$\omega_0 = 0$）时，公式给出 $V = \frac{5}{7}v_0$，这是不带旋转、打滑射出的球的标准结果。
- 若 $v_0 = 0$ 而只有下旋，则 $V = -\frac{2}{7}a\omega_0 < 0$：弹珠向后运动，任何弹过带下旋弹珠的人都知道这一点。
- 以数值方法逐步推算这些方程（滑动速度一降至零便关掉摩擦力），当 $v_0 = 1$、$a\omega_0 = 3$ 时最终速度为 $-0.142857\ldots = -\frac{1}{7}$，而当 $v_0 = 2$、$a\omega_0 = 5$ 时则完全停下。

常见错误

- 在 $v = 0$ 时便停止计时。弹珠要到 $v + a\omega = 0$ 时才停止滑动；在 $v = 0$ 时它可能仍在旋转，正如第 (ii) 部分的情况。
- 弄错力矩（torque）的符号：底部向后的摩擦力会*减弱*下旋。
- 滚动开始后仍然保留摩擦力。一旦没有滑动，保持恒定速度并不需要摩擦力，所以摩擦力降为零。

STEP 之外

这里的摩擦力采用的是库仑（Coulomb）的滑动摩擦模型：表面相对滑动时大小恒定，不滑动时则需要多少便有多少（不超过某个上限）。角动量的捷径是刚体动力学（rigid-body

dynamics）中一条普遍原则的例子：选取适当的参考点，使那个麻烦的未知力没有力矩。桌球（snooker）和英式撞球（billiards）球手打缩杆（screw-back）时，利用的正是这套物理。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种思路处理刚体转动和带滑动的滚动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。