详细解答

STEP III 1997，第 1 题

纯数学 · 指数幂级数

> **STEP III 1997，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s3-q1

关键思路

把 $\mathrm{e}^x = \sum x^n/n!$ 乘以一个多项式（polynomial），相当于把级数（series）逐项向后平移。于是 x^n 的系数（coefficient）就是 $1/n!$、$1/(n-1)!$、$1/(n-2)!$,… 的组合；以 $n!$ 作公分母通分后，分子是一个关于 n 的多项式。代入 $x=1$，幂级数（power series）的恒等式就变成一个数值级数的恒等式。因此整道题的关键，在于选出能产生所需分子的多项式。下降阶乘（falling factorials）n、$n(n-1)$、$n(n-1)(n-2)$ 是最自然的基本组件，因为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)/n! = 1/(n-k)!$。

解答

在整个解答中，$\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0} x^n/n!$ 对所有实数 x 都绝对收敛（converges absolutely）。把它乘以一个多项式，得到的是有限个这类级数之和，所以我们可以把这些级数逐项相加，然后代入 $x=1$。我们约定：当 m 为负整数时，$1/m! = 0$。这样，下面每一个和式都可以由 $n=0$ 开始。

第 (i) 部分

我们有

$$(x^2+5x+4)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+2}}{n!} + 5\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n!} + 4\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}.$$

要合并 x^n 的系数，先把头两个和式重新编排下标（reindex）。该系数为

$$\frac{1}{(n-2)!}+\frac{5}{(n-1)!}+\frac{4}{n!}=\frac{n(n-1)+5n+4}{n!}$$
$$=\frac{n^2+4n+4}{n!}=\frac{(n+2)^2}{n!}.$$

这对所有 $n\geq 0$ 都成立，包括 $n=0$ 和 $n=1$：在这两个情况下，约定 $1/m!=0$ 会把不存在的项消去。（当 $n=0$ 时，系数为 $4=2^2/0!$；当 $n=1$ 时，系数为 $5+4=9=3^2/1!$。）因此

$$(x^2+5x+4)\,\mathrm{e}^x=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+2)^2}{n!}\,x^n,$$

代入 $x=1$ 得

$$10\,\mathrm{e}=\frac{2^2}{0!}+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\frac{5^2}{3!}+\cdots=4+\frac{3^2}{1!}+\frac{4^2}{2!}+\cdots,$$

这正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分

现在通项（general term）是 $(n+1)^2/n!$，所以我们要找一个二次式 x^2+bx+c，使其级数的系数为

$$\frac{n(n-1)+bn+c}{n!}=\frac{(n+1)^2}{n!}.$$

想一想 怎样才能不靠猜测而求出 b 和 c?

把目标分子写成下降阶乘的形式：$n^2+2n+1=n(n-1)+3n+1$。比较系数得 $b=3$ 和 $c=1$。于是，按照与第 (i) 部分完全相同的论证，

$$(x^2+3x+1)\,\mathrm{e}^x=\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2}{n!}\,x^n,$$

代入 $x=1$ 得

$$(1+3+1)\,\mathrm{e}=5\,\mathrm{e}=1+\frac{2^2}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{4^2}{3!}+\cdots.$$

第 (iii) 部分

通项是 $(n+1)^3/n!$，所以这次需要一个三次式。$(ax^3+bx^2+cx+d)\,\mathrm{e}^x$ 中 x^n 的系数为

$$\frac{a}{(n-3)!}+\frac{b}{(n-2)!}+\frac{c}{(n-1)!}+\frac{d}{n!}=\frac{a\,n(n-1)(n-2)+b\,n(n-1)+c\,n+d}{n!}.$$

我们把目标分子展开成下降阶乘。由于 $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$ 及 $n^2 = n(n-1) + n$，

$$\begin{aligned}(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= [n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n] + 3[n(n-1) + n] + 3n + 1 \\ &= n(n-1)(n-2) + 6n(n-1) + 7n + 1.\end{aligned}$$

（以 $n = 1$ 快速验算：两边都等于 8。以 $n = 2$ 验算：$27 = 0 + 12 + 14 + 1$。）所以 $a = 1$、$b = 6$、$c = 7$、$d = 1$，而

$$(x^3 + 6x^2 + 7x + 1)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^3}{n!}\, x^n.$$

代入 $x = 1$，

$$1 + \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \cdots = (1 + 6 + 7 + 1)\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}.$$

想一想 为甚么不能直接把级数逐项平方或立方？

因为 $\sum (n+1)^3/n!$ 并不能以任何简单的方式由 $\sum (n+1)/n!$ 构造出来。和式对分子而言是线性的，所以我们能做的，是把分子拆成若干个 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 形式的部分；每一部分都与 $n!$ 约分，得出 e 的级数平移后的版本。每一个这样的部分在 $x = 1$ 时都恰好贡献 e。因此答案就是 e 乘以各下降阶乘系数之和，即 $1 + 6 + 7 + 1 = 15$。

验算

- 计算至 $n = 60$ 的部分和（partial sums），得 27.1828…、13.5914… 和 40.7742…，在机器精度内与 10e、5e 和 15e 吻合。
- 三个分子恒等式中的系数，已就 $n = 0, \ldots, 39$ 逐一精确验证。
- 一致性：第 (ii) 部分的级数是 $\sum (n+1)^2/n!$，第 (i) 部分的是 $\sum (n+2)^2/n!$。两者之差 $\sum (2n+3)/n! = 2\sum n/n! + 3\sum 1/n! = 2\mathrm{e} + 3\mathrm{e} = 5\mathrm{e}$，确实等于 $10\mathrm{e} - 5\mathrm{e}$。

常见错误

- 忘记在重新编排和式的下标时，头两项（$n = 0, 1$）需要另行处理。约定 $m < 0$ 时 $1/m! = 0$ 可以处理这两项，但你仍应亲自检查。
- 把 $(n+1)^3$ 与幂 n^3, n^2, n 比较系数，而不是与下降阶乘比较，结果选错了三次式。

STEP 之外

和式 $\sum_{n\geq 0} n^k/n!$ 等于 $B_k\,\mathrm{e}$，其中 B_k 是第 k 个贝尔数（Bell number），即把一个含 k 个元素的集合划分（partition）的方法数目：$B_0,\ldots,B_4 = 1,1,2,5,15$。这就是 Dobiński 公式（Dobiński's formula）。事实上，设 $m = n+1$，第 (iii) 部分就是 $\sum_{m\geq 1} m^4/m! = B_4\,\mathrm{e} = 15\,\mathrm{e}$，而系数 $1,6,7,1$ 正是第二类斯特灵数（Stirling numbers of the second kind）$1,7,6,1$ 倒过来的次序。幂级数之所以可以逐项重排和合并，依据是绝对收敛，这是大学一年级分析学（analysis）的一个主题。理论方面可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*；想做更多同类题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。